Horst Knörrer

Geometrie

Ein Lehrbuch für Mathematik- und Physikstudierende

2. Auflage

vieweg

vieweg studium – Aufbaukurs Mathematik

Horst Knörrer

Geometrie

vieweg studium

Aufbaukurs Mathematik

Herausgegeben von Martin Aigner, Peter Gritzmann, Volker Mehrmann

und Gisbert Wüstholz

Martin Aigner

Diskrete Mathematik

Walter Alt

Nichtlineare Optimierung

Albrecht Beutelspacher und Ute Rosenbaum

Projektive Geometrie

Gerd Fischer

Ebene algebraische Kurven

Wolfgang Fischer und Ingo Lieb

Funktionentheorie

Otto Forster

Analysis 3

Klaus Hulek

Elementare Algebraische Geometrie

Horst Knörrer

Geometrie

Helmut Koch

Zahlentheorie

Ulrich Krengel

Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Ernst Kunz

Einführung in die algebraische Geometrie

Wolfgang Kühnel

Differentialgeometrie

Wolfgang Lück

Algebraische Topologie

Werner Lütkebohmert

Codierungstheorie

Reinhold Meise und Dietmar Vogt

Einführung in die Funktionalanalysis

Erich Ossa

Topologie

Jürgen Wolfart

Einführung in die Zahlentheorie und Algebra

Gisbert Wüstholz

Algebra

vieweg

Horst Knörrer

Geometrie

Ein Lehrbuch für Mathematik- und Physikstudierende

2., aktualisierte Auflage

Mit 233 Bildern

Bibliografische Information Der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der

Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über

<http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Prof. Dr. Horst Knörrer

ETH Zürich

Departement Mathematik

ETH Zentrum

CH-8092 Zürich

E-Mail: knoerrer@math.ethz.ch

1. Auflage 1996

2,. aktualisierte Auflage Oktober 2006

Alle Rechte vorbehalten

© Friedr. Vieweg & Sohn Verlag | GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden 2006

Lektorat: Ulrike Schmickler-Hirzebruch | Petra Rußkamp

Der Vieweg Verlag ist ein Unternehmen von Springer Science+Business Media.

www.vieweg.de

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt.

Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes

ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbe-

sondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und

die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Umschlaggestaltung: Ulrike Weigel, www.CorporateDesignGroup.de

Druck und buchbinderische Verarbeitung: MercedesDruck, Berlin

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

Printed in Germany

ISBN-10 3-8348-0210-7

ISBN-13 978-3-8348-0210-1

Vorwort

Wieder ein anderes Mal, als ich vor der Tafel stand und mit Kreide allerlei Figuren zeichne-

te, kam mir plötzlich der Gedanke:

Warum ist die Symmetrie den Augen angenehm? Was

”

ist eigentlich die Symmetrie?“ –

Sie ist ein angeborenes Gefühl“, gab ich mir selbst zur

”

Antwort. Worauf beruht sie? Herrscht denn in allem im Leben Symmetrie? Im Gegenteil,

”

da ist das Leben – “, und ich zeichnete eine ovale Figur auf die Tafel.

Nach dem Leben

”

geht die Seele in die Ewigkeit hinüber – da ist die Ewigkeit“ – und ich zog von der einen

Seite des Ovals einen Strich bis an den Rand der Tafel.

Warum ist denn auf der anderen

”

Seite nicht auch ein solcher Strich? In der Tat, wie kann es denn eine einseitige

Ewigkeit

geben, wir haben gewiß schon vor diesem Leben existiert, obwohl wir die Erinnerung daran

verloren haben.“ Diese Überlegung, die mir außerordentlich neu und klar vorkam und deren

logischen Zusammenhang ich jetzt nur mit Mühe wiederfinden kann, gefiel mir sehr, und

ich nahm ein Blatt Papier, um sie schriftlich darzulegen, aber dabei kam mir eine solche

Menge Gedanken in den Kopf, daß ich aufstehen mußte und im Zimmer auf und ab gehen.

Als ich zum Fenster kam, erregte ein Pferd meine Aufmerksamkeit, das der Kutscher gerade

vor einen Wasserwagen spannte, und alle meine Gedanken konzentrierten sich auf die Frage:

In welches Tier oder in welchen Menschen wird die Seele dieses Pferdes übergehen, wenn

es krepiert? In diesem Augenblick ging Wolodja durchs Zimmer und lächelte, als er merkte,

daß ich über etwas nachdachte, und dieses Lächeln genügte, mich zu der Einsicht zu bringen,

daß alles, worüber ich nachgedacht hatte, ein schrecklicher Unsinn war.

(aus: L. Tolstoj: Knabenalter1)

Irgendwie haben sich die meisten Menschen schon einmal über das Wesen von

Raum und Zeit Gedanken gemacht. Wenn Mathematiker dies berufsmäßig tun, nen-

nen sie das Ergebnis Geometrie.

Die Geometrie ist die älteste systematisierte mathematische Disziplin. Die viel-

fältigen Verallgemeinerungen des Raumbegriffs in der Mathematik und der Physik

sind ein Grund dafür, daß sich bis heute immer wieder neue Probleme ergeben, die

mit geometrischen Methoden behandelt werden können und manchmal sogar die

Entwicklung neuer geometrischer Disziplinen notwendig machen.

Trotz ihrer großen Bedeutung wird die Geometrie im Grundstudium der Mathe-

matik und Physik meist nur nebenbei behandelt. Man hält es – wohl mit einigem

Recht – für ökonomischer, zunächst mit Analysis und Linearer Algebra allgemeine

Strukturen und Theorien zu unterrichten, die es ermöglichen, später – oder auch

nebenher – geometrische Probleme leichter zu behandeln.

So entsteht oft eine Lücke zwischen Schulgeometrie und den modernen geometri-

schen Theorien, die man im Hauptstudium kennenlernen kann. Dieses Buch bietet

die Möglichkeit, die Lücke zu verkleinern. Es enthält einige in Mathematik und Phy-

sik wichtige geometrische Themen, die ‘elementar’ sind in dem Sinne, daß zu ihrem

Verständnis die Kenntnis abstrakter Theorien und Begriffe nicht notwendig ist 2.

Andererseits sind eine Reihe der dargestellten Resultate insofern ‘nicht elementar’,

1 Mit freundlicher Genehmigung des Insel Verlages zitiert aus L. Tolstoj: “Kindheit und Jugend”,

insel taschenbuch 203.

2 Einzige Ausnahme bildet das Konzept der ‚Gruppe’, das in Kapitel 1 am Beispiel der Sym-

metriegruppen eingeführt wird und vor allem in den Kapiteln 1, 3 und 6 eine wichtige Rolle

spielt.

als sowohl die Fragestellungen als auch die bei ihrer Lösung entwickelten Ideen weit

über die Vorstellung von Geometrie, wie sie in der Schule vermittelt wird, hinausge-

hen.

Die Leserinnen und Leser können in diesem Buch exemplarisch verfolgen, wie Mathe-

matik funktioniert – und zwar an interessanten, anschaulichen, aber nicht trivialen

Beispielen. Die dabei erforderlichen Vorkenntnisse gehen kaum über Schulwissen, si-

cher aber nicht über den Stoff des ersten Semesters Mathematik oder Physik hinaus

3. In den Ergänzungen zu den einzelnen Kapiteln habe ich die Beschränkung auf

ganz elementare Vorkenntnisse fallen lassen. Die behandelten Themen werden dort

vertieft; es werden Querverbindungen zwischen den einzelnen Kapiteln gezogen und

Hinweise auf andere Gebiete der Mathematik und der Physik gegeben, mit denen

die Themen in Beziehung stehen.

Auf einen wichtigen Aspekt der modernen Geometrie wird implizit hingearbei-

tet - nämlich daß ‘Raum’ nicht unbedingt der dreidimensionale Euklidische Raum

ist, sondern daß viele andere Räume existieren, die geometrisch untersucht wer-

den können und müssen. Dies beginnt in Kapitel 3 mit der Diskussion der nicht-

euklidischen Geometrie, findet seine Fortsetzung im Abschnitt 5.4 über die der spezi-

ellen Relativitätstheorie zugrundeliegende Lorentz-Geometrie, und kulminiert in den

Abschnitten 6.3 - 6.7, in denen die Gruppe SO (3) selbst einen Raum bildet, dessen

Geometrie untersucht wird. In diesem Zusammenhang wird mit der Fundamental-

gruppe auch ein Konzept der ‘höheren Geometrie’ vorgestellt, das paradigmatisch

ist für eine ganze geometrische Disziplin, die algebraische Topologie.

Geometrie ist naturgemäß anschaulich – und die Anschauung steht in diesem

Buch auch im Vordergrund. Auf präzise Beweise wird jedoch nie verzichtet. Wenn

man von mathematisch strengen Beweisen spricht, stellt sich natürlich die Frage,

wo die Beweise verankert sind, d.h. welche Tatsachen als bekannt und nicht ei-

nes Beweises bedürftig angenommen werden. Dies variiert im Laufe des Buches. In

den ersten beiden Kapiteln (*Symmetrie und Symmetriegruppen, Elementare Vek-*

torrechnung) wird mit dem ‘naiven’ Raum - und Vektorbegriff der Schule gearbeitet

– Puristen wird wohl die “Rechte-Hand-Regel” in Satz 2.2 stören. Kapitel 3 be-

ginnt mit einer kritischen Diskussion der Axiome in Euklid’s Elementen, stellt dann

das Hilbert’sche Axiomensystem vor, und enthält den Beweis der Unabhängigkeit

des Parallelenaxioms durch Angabe des Poincaré-Modells der hyperbolischen Ebe-

ne. Dabei werden die Grundeigenschaften der reellen und komplexen Zahlen als

bekannt vorausgesetzt. Ab Kapitel 4 wird Geometrie durch Einführung cartesischer

Koordinaten (im formal-logischen Sinn) auf Operationen mit Tupeln reeller Zahlen

zurückgeführt.

Die einzelnen Kapitel des Buches sind nahezu unabhängig voneinander (genaue-

re Informationen enthält Anhang A). Neben den im Text und in den Ergänzungen

gegebenen Ausblicken enthält Anhang B Hinweise auf weiterführende Literatur.

3 In Anhang A sind die für die einzelnen Abschnitte erforderlichen

Vorkenntnisse

zusammengestellt.

Viele haben zur Entstehung dieses Buches beigetragen. Zuallererst die Erstsemesterstudentinnen und -studenten der Mathematik und Physik an der ETH Zürich, für die ich wiederholt die Geometrievorlesung halten durfte. Mit ihrem Interesse an der Geometrie und ihrer geduldigen und konstruktiven Kritik hatten sie wesentlichen Einfluß auf die Entwicklung der Vorlesung und damit auf dieses Buch. Für viele kritische Bemerkungen und wichtige Verbesserungsvorschläge danke ich auch Albert Gächter, Wolfgang Ingrisch und Erwin Neuenschwander. Die Bilder haben Nicolette Bösch, Daniel Darms, Harald Deppeler, Roland Friedrich und Marianne Pfister angefertigt, und der Text wurde geschrieben von Harald Deppeler, Wolfgang Gehrig, Marianne Kellersberger und Matthias Zürcher. Jörg Knappen vereinheitlichte im Auftrag des Vieweg-Verlags die mit diversen LATEX– und TEX– Macros geschriebenen Teile des Manuskripts und besorgte das Layout. Allen Beteiligten danke ich herzlich.

Für die zweite Auflage wurde der Text behutsam verbessert und aktualisiert.

Zürich, im Juli 2006

Inhaltsverzeichnis

1

Symmetriegruppen

1

1.1

Isometrien der Ebene und des Raums . . . . . .

5

1.2

Gruppen und Gruppenoperationen . . . . . .

20

1.3

Endliche Symmetriegruppen . . . . . .

39

1.4

Ergänzungen zu Kapitel 1 . . . . . .

60

1.4.1

Reguläre Polyeder . . . . . .

60

1.4.2

Kristallographische Gruppen

. . . . . .

61

1.4.3

Der Brouwersche Fixpunktsatz . . . . . .

63

2

Skalarprodukt und Vektorprodukt

65

2.1

Skalarprodukt von Vektoren . . . . . .

70

2.2

Das Vektorprodukt

. . . . . .

74

2.3

Ergänzungen zu Kapitel 2 . . . . . .

79

2.3.1

Divergenz, Gradient und Rotation . . . . . .

79

2.3.2

Die Lorentzkraft . . . . . .

80

2.3.3

Infinitesimale Drehungen

. . . . . .

81

3

Das Parallelenaxiom

83

3.1

Axiome der Euklidischen Geometrie . . . . . .

88

3.2

Das Poincaré-Modell der hyperbolischen Ebene . . . . . .

98

3.3

Das Doppelverhältnis und die Längenmessung in der hyperboli-

schen Ebene

. . . . . .

120

3.4

Die Winkelmessung

in der hyperbolischen Ebene

. . . . . .

137

3.5

Ergänzungen zu Kapitel 3 . . . . . .

148

3.5.1

Das Beltrami–Klein–Modell . . . . . .

148

3.5.2

Bemerkungen zur Geschichte . . . . . .

150

3.5.3

Reduktion binärer quadratischer Formen und ebene Gitter

.

154

3.5.4

Elliptische Geometrie

. . . . . .

164

4

Kegelschnitte

167

4.1

Normalformen . . . . . .

168

4.2

Brennpunkte und Brenngeraden . . . . . .

179

4.3

Schnitt eines Kegelschnitts mit Geraden oder anderen Kegelschnit-

ten . . . . . .

189

4.4

Konfokale Kegelschnitte . . . . . .

198

4.5

Die Sätze von Pascal und Brianchon . . . . . .

208

4.6

Dualität . . . . . .

219

4.7

Ergänzungen zu Kapitel 4 . . . . . .

230

4.7.1

Gleichungen von Kegelschnitten in Polarkoordinaten . . . . .

230

4.7.2

Kepler’sche Ellipsen . . . . . .

233

4.7.3

Die Dandelin’schen Kugeln . . . . . .

235

4.7.4

Billiards . . . . . .

236

4.7.5

Der Poncelet’sche Schließungssatz

. . . . . .

241

4.7.6

Affine Klassifikation von Kegelschnitten und affine Kurven . .

241

4.7.7

Die projektive Ebene . . . . . .

244

5

Quadriken in R3

250

5.1

Hauptachsentransformation für quadratische Formen . . . . . .

251

5.2

Normalformen . . . . . .

257

5.3

Geraden auf einem einschaligen Hyperboloid

. . . . . .

263

5.4

Lorentz-Geometrie . . . . . .

278

5.5

Ergänzungen zu Kapitel 5 . . . . . .

291

5.5.1

Der Trägheitstensor . . . . . .

291

5.5.2

Eine Beziehung zwischen Lorentz-Geometrie und hyperboli-

scher Geometrie

. . . . . .

292

5.5.3

Die Schläfli’sche Doppelsechs und kubische Flächen . . . . . .

296

6

Die Geometrie der Gruppe SO(3)

300

6.1

Eulersche Winkel . . . . . .

303

6.2

Die Liealgebra $sO(3)$ . . . . . .

307

6.3

Die stereographische Projektion . . . . . .

311

6.4

Die Pauli-Matrizen . . . . . .

320

6.5

Ein Weg in $SO(3)$, der nicht zusammenziehbar ist . . . . . .

324

6.6

Die Fundamentalgruppe . . . . . .

329

6.7

Die Hopfabbildung . . . . . .

340

6.8

Ergänzungen zu Kapitel 6 . . . . . .

345

6.8.1

Die Bewegung eines Kreisels . . . . . .

345

6.8.2

Quaternionen . . . . . .

347

6.8.3

Endliche Untergruppen von SU(2) . . . . . .

349

6.8.4

SL(2 , C) und *SO*+(3 , 1) 350

6.8.5

Die Zopfgruppe als Fundamentalgruppe . . . . . .

353

Anhang A: Vorkenntnisse

354

Anhang B: Hinweise zum Literaturverzeichnis

359

Literaturverzeichnis

360

Index

368

1

Symmetriegruppen

Ein wichtiger Aspekt der Geometrie und der Mathematik überhaupt ist es, an-

schauliche Sachverhalte präzise zu fassen, zu abstrahieren und dann mit Hilfe rein

logischen Schließens neue Sachverhalte zu beweisen, die nicht auf den ersten Blick

offensichtlich sind. Zunächst wollen wir diesen Aspekt exemplarisch am Beispiel des

Begriffs Symmetrie“ diskutieren.

”

Bild 1.1

Wir sehen auf den ersten Blick, daß die Figur in Bild 1.1 links in der Ebene unsym-

metrisch ist, während das reguläre Sechseck (rechts in Bild 1.1) *recht* symmetrisch

aussieht. Ähnlich ist es bei den beiden Gebilden in Bild 1.2. Das links dargestell-

te Gebilde ist im Raum unsymmetrisch, während das Dodekaeder rechts eine *sehr*

symmetrische Figur ist.

Bild 1.2

links: unsymmetrisches Gebilde, rechts: Dodekaeder

Wir sagen, daß ein reguläres Achteck symmetrischer ist als ein gleichschenkliges

Dreieck, oder daß ein Dodekaeder anders symmetrisch ist als ein Würfel. Natürlich

gibt es auch Figuren in der Ebene bzw. im Raum, die die gleiche Symmetrie haben,

so etwa zwei gleichschenklige Dreiecke mit verschiedenen Winkeln (siehe Bild 1.4)

oder ein Dodekaeder und ein Ikosaeder (Bild 1.5).

Bild 1.3

Reguläres Achteck und gleichschenkliges Dreieck

Bild 1.4

Zwei gleichschenklige Dreiecke

In der Natur und in der Kunst trifft man immer und immer wieder auf Symme-

trien. Viele schöne Beispiele finden Sie in [Brieskorn], [Burns–Glazer], [Bigalke] und

[Weyl].

Wie oben gesagt, wollen wir versuchen, den Begriff der Symmetrie präzise zu

fassen und zu abstrahieren, um dann zu neuen, nicht ganz offensichtlichen Aussagen

zu kommen. Die Aussagen, auf die wir hinzielen, sind Klassifikationen aller möglichen

Symmetrietypen“.

” Die Präzisierung des Begriffes Symmetrie“ ist selbstverständlich das Ergebnis ei-

”

ner langen historischen Entwicklung, deren Schilderung Sie beispielsweise in [Scholz]

finden. Wir werden – grob gesagt – die Symmetrie einer Figur daran messen, wie-

viele Drehungen und Spiegelungen es im Raum gibt, die die Figur mit sich selbst

zur Deckung bringen. Um dies noch etwas genauer zu fassen, führen wir die folgende

Sprechweise ein:

Definition 1 *Eine* Isometrie *der Ebene (bzw. des Raumes) ist eine Abbildung ϕ der*

Ebene (des Raumes) auf sich, so daß f¨

ur je zwei Punkte X und Y in der Ebene (bzw.

im Raum) der Abstand von $\phi(X)$ und $\phi(Y)$ gleich dem Abstand von X und Y ist.

Beispiele von Isometrien sind etwa Translationen um einen Vektor **v**, Spiegelungen

an einer Geraden in der Ebene oder an einer Ebene im Raum, Drehungen um einen

3

Bild 1.5

Ikosaeder

Punkt in der Ebene oder um eine Achse im Raum. Eine besondere Isometrie ist die

identische Abbildung id , die jeden Punkt auf sich selbst abbildet.

Sind ϕ und ψ Isometrien, so ist auch die Abbildung $\phi \circ \psi$, die jeden Punkt

X auf ϕ (ψ(X)) abbildet, eine Isometrie. Diese Abbildung bezeichnen wir als die

Hintereinanderschaltung von ϕ und ψ.

Wir wollen jetzt für einige symmetrische Figuren die Menge aller Isometrien, die

die Figur auf sich abbilden, bestimmen.

Das erste Beispiel ist ein gleichseitiges Dreieck (vgl. Bild 1.6). Bezeichnet man

A

A

3

3

A

A

A

A

1

2

1

2

Bild 1.6

Gleichseitige Dreiecke, rechts mit Symmetrie ϕ 1

seine Ecken mit A 1, A 2, A 3 , so sieht man sofort die folgenden Isometrien, die das

Dreieck auf sich abbilden:

1. Die Spiegelung an der Achse durch den Punkt A 1 und den Mittelpunkt der

Strecke A 2 A 3 , die wir mit ϕ 1 bezeichnen wollen.

2. Die Spiegelung an der Achse durch den Punkt A 2 und den Mittelpunkt der

Strecke A 3 A 1 , die wir mit ϕ 2 bezeichnen wollen.

3. Die Spiegelung an der Achse durch den Punkt A 3 und den Mittelpunkt der

Strecke A 1 A 2, die wir mit ϕ 3 bezeichnen wollen.

.

4. Die Drehung um den Schwerpunkt des Dreiecks mit dem Drehwinkel 120 ◦, die

wir mit ψ 1 bezeichnen wollen.

5. Die Drehung um den Schwerpunkt des Dreiecks mit dem Drehwinkel 240 ◦, die

wir mit ψ 2 bezeichnen wollen.

6. Die identische Abbildung id .

Man kann sich nun überzeugen, daß die Hintereinanderschaltung von je zwei Isome-

trien aus der obigen Liste wiederum eine Isometrie aus der obigen Liste ergibt.

So gilt etwa:

$\phi 1 \circ \phi 1 = id$

$\phi 2 \circ \phi 2 = id$

$\phi 3 \circ \phi 3 = id$

$\psi 1 \circ \psi 1 = \psi 2$

$\psi 2 \circ \psi 2 = \psi 1$

$id \circ id$

$=$

id

$id \circ \phi i = \phi i \circ id$

$=$

ϕi

für

$i = 1 , 2 , 3$

$id \circ \psi j$

$=$

$\psi j \circ id$

=

ψj

für

$j = 1 , 2$

$\phi 2 \circ \phi 1 = \psi 2$

Mit Ausnahme der letzten sind diese Gleichungen leicht nachzuprüfen. Die letzte

Gleichung ist zumindest plausibel, da sowohl $\phi 2 \circ \phi 1$ als auch $\psi 2$ den Schwerpunkt

des Dreiecks auf sich, die Ecke $A 1$ auf die Ecke $A 3$, die Ecke $A 2$ auf die Ecke $A 1$ und

die Ecke $A 3$ auf die Ecke $A 2$ abbilden (vgl. Bild 1.7). Einen exakten Beweis können

wir erst geben, wenn wir die Struktur von Isometrien genauer kennen.

A 3

A

A

1

2

Bild 1.7

Gleichseitiges Dreieck: $\phi 2 \circ \phi 1 = \psi 2$

Wir wollen zeigen, daß wir bereits alle Isometrien der Ebene gefunden haben, die

das reguläre Dreieck in sich überführen. Auch dazu ist es nützlich, die Struktur von

Isometrien genauer zu kennen.

.

.

.

.

1.1

Isometrien der Ebene und des Raums

Der erste Satz in diesem Buch ist die Beschreibung aller Isometrien der Ebene, die

einen gegebenen Punkt O festlassen.

Satz 1.1 *Sei O ein Punkt der Ebene und ϕ eine Isometrie der Ebene mit $\phi(O) = O$.*

Dann gilt:

• *Entweder ϕ ist eine Drehung um O, um einen Winkel α mit* $0 < \alpha < 360^\circ$,

• *oder ϕ ist Spiegelung an einer Achse durch O,*

• *oder $\phi = id$.*

Die drei Typen von Isometrien, die in Satz 1.1 aufgeführt sind, unterscheiden sich

wesentlich. Ist ϕ eine Drehung um O mit einem Drehwinkel α, $0 < \alpha < 360^\circ$, so

gilt für jeden von O verschiedenen Punkt X, daß $\phi(X) = X$. Dagegen bildet eine

Spiegelung an einer Achse g jeden Punkt von g auf sich ab, und die Identität *id*

bildet sogar jeden Punkt der Ebene auf sich ab. Diese Überlegung legt es nahe, den

folgenden Begriff einzuführen:

Definition 2 *Sei ϕ eine Isometrie der Ebene bzw. des Raums. Ein Punkt P der*

Ebene bzw. des Raums heißt Fixpunkt *von ϕ, falls $\phi(P) = P$.*

Beweis von Satz 1.1: Natürlich kann der Beweis, den wir jetzt geben werden, nur so

präzise sein, wie die Begriffe, die wir verwenden, definiert sind. Wir werden also ohne

weitere Erklärung voraussetzen, daß wir wissen, was die Begriffe Ebene“, Raum“,

”

”

Spiegelung“,

Drehung“, usw. bedeuten. Nach dieser Vorbemerkung beginnen wir

”

”

mit dem eigentlichen Beweis.

Wir machen eine Fallunterscheidung:

1. Fall : ϕ hat einen von O verschiedenen Fixpunkt P .

Es sei g die Gerade durch O und P . Mit s bezeichnen wir die Spiegelung an der

Geraden g. Weil ϕ eine Isometrie ist, ist für jeden Punkt X in der Ebene der Abstand

von ϕ (X) zu $O = \phi$ (O) gleich dem Abstand von X zu O, d.h. ϕ (X) liegt auf dem Kreis um O mit Radius OX. Hier, wie im Folgenden, bezeichnet OX den Abstand

zwischen O und X. Aus demselben Grund liegt ϕ (X) auch auf dem Kreis um P mit

Radius $P\ X$.

s(X)

g

O

P

X

Bild 1.8

Falls X nicht auf g liegt, schneiden sich diese beiden Kreise in genau zwei Punkten,

nämlich X und s (X) (vgl. Bild 1.8).

Falls X auf g liegt, so schneiden sich die beiden Kreise in genau einem Punkt,

nämlich $X = s(X)$.

Auf jeden Fall gilt also für jeden Punkt in der Ebene:

ϕ (X) = X

oder

$\phi(X) = s(X)$

(1.1)

Insbesondere ist jeder Punkt von g Fixpunkt von ϕ.

Fall 1a: ϕ hat einen Fixpunkt Q, der nicht auf der Geraden g liegt.

Für jeden Punkt X in der Ebene, der nicht auf g liegt, ist der Abstand von $s(X)$ zu

Q verschieden vom Abstand von X zu Q. Da ϕ eine Isometrie ist und $\phi(Q) = Q$, kann also für einen derartigen Punkt $\phi(X)$ nicht gleich $s(X)$ sein. Nach (1.1) ist

stets $\phi(X) = X$ oder $\phi(X) = s(X)$. Also gilt:

$\phi(X) = X$

für alle X, die nicht auf der Geraden g liegen .

Wir haben schon festgestellt, daß alle Punkte von g Fixpunkte von ϕ sind. Somit ist

$\phi(X) = X$

für alle Punkte X der Ebene

mit anderen Worten:

$\phi = id$

Um unsere Diskussion des 1. Falls abzuschließen, müssen wir jetzt noch die Situa-

tion betrachten, daß Fall 1a nicht eintritt, d.h. die Negation der Aussage von Fall

1a. Dies ist

Fall 1b: Für alle Punkte Q, die nicht auf der Geraden g liegen, gilt $\phi(Q) = Q$.

Nach (1.1) ist dann $\phi(Q) = s(Q)$ für alle Punkte Q, die nicht auf g liegen. Für

die Punkte von g gilt dies sowieso, also ist

$\phi = s$

d.h. ϕ ist eine Spiegelung an der Geraden g.

Damit ist die Diskussion des 1. Falls beendet. Unser zweiter Fall ist wieder die

Negation des 1. Falls, d.h.:

2. Fall : $\phi(P) = P$ für alle $P = O$.

$\phi(P)$

0

O

α

P 0

Bild 1.9

Wir wählen einen Punkt P 0, der von O verschieden ist. Dann ist $\phi(P\ 0) = P\ 0$,

aber $\phi(P\ 0)$ hat den gleichen Abstand zu O wie P 0. Deshalb gibt es eine Drehung

$r\alpha$ um einen Winkel α mit $0 < \alpha < 360\circ$ um den Punkt O, so daß $r\alpha(P\ 0) = \phi(P\ 0)$ (vgl. Bild 1.9).

Unser Ziel ist es zu zeigen, daß $\phi = r\alpha$. Es sei $r{-}\alpha$ die Drehung um den Winkel

$-\alpha$. Offensichtlich gilt

$r\alpha \circ r{-}\alpha = id$, $r{-}\alpha \circ r\alpha = id$ und

$r{-}\alpha\ \phi\ (\ P\ 0) = P\ 0$

Als Hilfskonstruktion im Beweis betrachten wir die Abbildung

$\psi := r{-}\alpha \circ \phi$

Da $r{-}\alpha$ und ϕ Isometrien sind, ist auch ψ eine Isometrie. Ferner ist

$\psi\ (\ P\ 0) = r{-}\alpha\ \phi\ (\ P\ 0) = P\ 0$

und $\psi(\ O) = O$. Auf ψ trifft also die Voraussetzung des 1. Falles zu. Nach dem, was

wir oben bewiesen haben, ist also ψ entweder die identische Abbildung id , oder die

Spiegelung s an der Geraden durch O und $P\ 0$.

Fall 2a: $\psi = id$

Nach Definition ist dann:

$id = r{-}\alpha \circ \phi$, also

$r\alpha \circ id = r\alpha \circ (\ r{-}\alpha \circ \phi) = (\ r\alpha \circ r{-}\alpha,\ ) \circ \phi = id \circ \phi,$

also

$\phi = r\alpha$

Fall 2b: $\psi = s$

Dann ist

$s = r{-}\alpha \circ \phi$, also

$r\alpha \circ s = r\alpha \circ (\ r{-}\alpha \circ \phi\ ) = \phi$

(1.2)

Die Abbildung $r\alpha \circ s$ führt aber den Punkt P , der auf dem Kreis um O mit Radius

OP liegt und mit der Strecke OP 0 den Winkel $\alpha/2$ einschließt, in sich über (vgl.

Bild 1.10). Nach (1.2) ist in dieser Situation ϕ (P) = P , und das ist ein Widerspruch

ϕ(P)

0

P

α/2

α

P

/2

0

O

α/2

s(P)

Bild 1.10

zu der Annahme, die wir für Fall 2 gemacht haben. Somit kommt Fall 2b überhaupt

nicht vor.

.

Damit ist der Satz bewiesen; wir haben gesehen, daß in jedem der möglichen Fälle

ϕ entweder die Identität oder eine Spiegelung an einer Geraden durch O oder eine

Drehung um den Punkt O ist.

✷

Wir kommen jetzt zurück zu der Situation, die wir vor Satz 1.1 betrachtet haben,

nämlich der Diskussion aller Isometrien der Ebene, die ein gegebenes gleichseitiges

Dreieck in sich überführen. Wir haben sechs solche Isometrien gefunden, drei Spie-

gelungen an Achsen durch je eine Ecke und den Mittelpunkt der gegenüberliegenden

Seite des Dreiecks, eine Drehung um den Schwerpunkt des Dreiecks um den Winkel

120°, eine Drehung um den Schwerpunkt des Dreiecks um den Winkel 240° und die

identische Abbildung id . Mit Hilfe von Satz 1.1 ist es nun leicht zu zeigen, daß dies

in der Tat alle Isometrien des Dreiecks sind. Ist nämlich ϕ eine Isometrie, die das

Dreieck auf sich selbst abbildet, so bildet ϕ auch die Ecken des Dreiecks wieder auf

Ecken ab, denn der Abstand zwischen zwei Ecken ist der maximal mögliche Abstand

zwischen zwei Punkten im Dreieck. Der Mittelpunkt des Dreiecks ist charakterisiert

als derjenige Punkt, der gleichen Abstand von allen drei Ecken des Dreiecks hat. Da

ϕ eine Isometrie ist, bildet ϕ folglich den Mittelpunkt des Dreiecks auf sich selbst ab.

Nach Satz 1.1 ist ϕ also entweder eine Drehung um den Mittelpunkt des Dreiecks

oder eine Spiegelung um eine Achse durch den Mittelpunkt des Dreiecks oder die

Identität id . Nun überzeugt man sich leicht, daß eine Drehung um den Mittelpunkt

des Dreiecks, die das Dreieck in sich überführt, den Winkel 120° oder 240° haben

muß. Ist s eine Spiegelung an einer Achse g durch den Mittelpunkt des Dreiecks, die

das Dreieck auf sich abbildet, so ist mit jeder Ecke des Dreiecks, die nicht auf g liegt,

auch das Spiegelbild der Ecke bezüglich s wiederum eine Ecke des Dreiecks. Da die

Zahl der Ecken des Dreiecks ungerade ist, liegt mindestens eine Ecke des Dreiecks

auf der Achse g. Damit nun s das Dreieck auf sich abbildet, muß die Achse dann

auch durch den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite gehen.

¨

Ubung: Berechnen Sie für je zwei Isometrien des gleichseitigen Dreiecks deren Hin-

tereinanderschaltung!

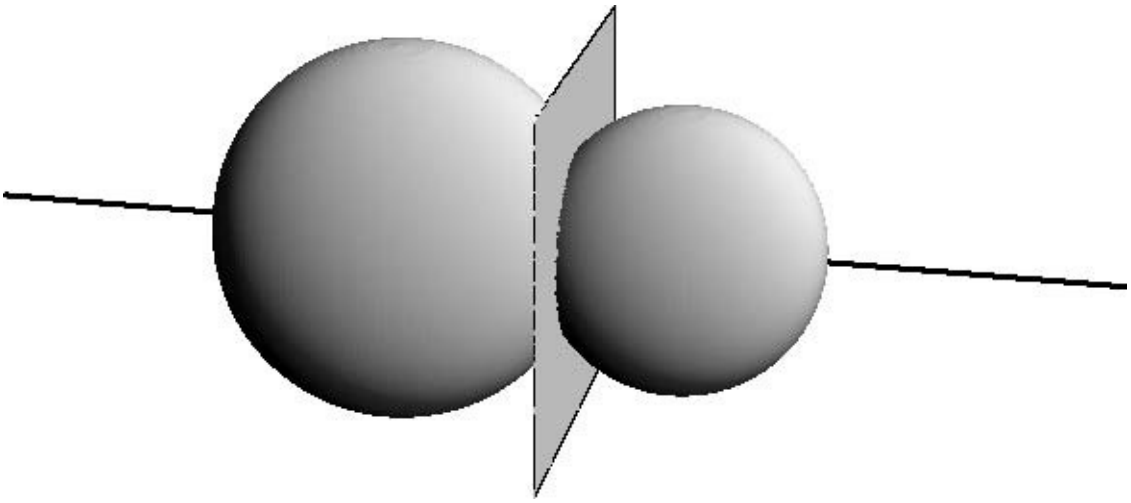
Wir wollen nun noch für einige andere Gebilde diejenigen Isometrien bestimmen,

die die Gebilde auf sich abbilden. Zunächst betrachten wir das reguläre Sechseck

(siehe Bild 1.11).

Bild 1.11

Reguläres Sechseck



Die folgenden Symmetrien springen sofort ins Auge:

• Spiegelungen an Achsen durch zwei gegenüberliegende Ecken des Sechsecks

• Spiegelungen an Achsen durch zwei gegenüberliegende Kanten-Mittelpunkte

des Sechsecks

• Drehungen um Vielfache von 60 ◦ um den Schwerpunkt

• und natürlich die identische Abbildung *id*

Dies sind zusammen zwölf Isometrien, die das reguläre Sechseck auf sich abbilden.

Wie oben kann man zeigen, daß dies alle Isometrien des regulären Sechsecks sind.

Allgemeiner kann man sich überlegen, daß für jede natürliche Zahl $n \geq 3$ die

Anzahl der Isometrien, die das reguläre n-Eck auf sich abbilden, gleich $2n$ ist. Zu

diesen $2n$ Isometrien gehören die Drehungen um Winkel, die Vielfache von $360^\circ/n$

sind, und n Spiegelungen an Achsen, die durch Ecken bzw. Kantenmittelpunkte des

regulären n-Ecks gehen.

..

Ubung: Für diese Übung setzen wir die folgenden Tatsachen als bekannt voraus: Zwei

verschiedene Kreise in der Ebene schneiden sich in höchstens zwei Punkten. Ist P

ein Schnittpunkt und s die Spiegelung an der Geraden durch die zwei Mittelpunkte

der Kreise, so ist $s(P)$ ebenfalls ein Schnittpunkt (vgl. Bild 1.12).

Bild 1.12

i) Zeigen Sie, daß der Durchschnitt zweier verschiedener Kugeloberflächen entwe-

der ein Kreis ist, der in einer Ebene senkrecht zu der Geraden durch die zwei

Kugelmittelpunkte liegt (vgl. Bild 1.13), oder nur aus einem Punkt besteht,

oder gleich der leeren Menge ist!

Bild 1.13

.

ii) Zeigen Sie, daß sich drei Kugeloberflächen, deren Kugelmittelpunkte nicht auf

einer Gerade liegen, in höchstens zwei Punkten treffen. Ist P ein derartiger

Schnittpunkt und s die Spiegelung an der Ebene durch die drei Kugelmittel-

punkte, so ist $s(P)$ wieder ein Schnittpunkt!

Bevor wir die Isometrien räumlicher Gebilde betrachten, formulieren wir das Ana-

logon von Satz 1.1 für den Raum.

Satz 1.2 *Sei O ein Punkt im Raum und ϕ eine Isometrie des Raums, die O als*

Fixpunkt hat. Dann gilt

• *entweder ϕ ist eine Drehung um eine Achse durch O um einen Winkel α mit*

$0 < \alpha < 360^\circ$

• *oder ϕ ist eine Spiegelung an einer Ebene durch O*

• *oder ϕ ist die* Punktspiegelung *pO am Punkt O. Dies ist die Abbildung, die*

jeden Punkt X im Raum auf den Punkt auf der Geraden durch O und X

abbildet, der von O den gleichen Abstand hat wie X, aber X gegen¨

uberliegt

• *oder* ϕ *ist Hintereinanderschaltung von pO und einer Drehung um eine Achse durch O mit einem von* 0° *und* 180° *verschiedenen Drehwinkel*

• *oder* $\phi = id$

Bemerkungen:

i) Für die Beschreibung von Drehungen im Raum verwenden wir folgende Konvention: Eine *Achse* (oder orientierte Gerade) durch O ist eine Gerade g durch O, bei der einer der beiden von O ausgehenden Strahlen auf g ausgezeichnet ist. Ist α ein Winkel, so sei die *Drehung um die Achse* g mit Winkel α die Drehung um die Gerade g, die die Ebene durch O senkrecht zu g – von einem Punkt des ausgezeichneten Strahls aus gesehen entgegen dem Uhrzeigersinn – um den Winkel α dreht. 1.5cm

O

α

g

Bild 1.14

Zeichnet man auf g den anderen Strahl aus (d.h. wählt man auf g die entgegengesetzte Orientierung), so ergibt die Drehung um den Winkel α die Inverse zu der vorher beschriebenen Abbildung.

ii) Ist r eine Drehung um eine Achse g durch O mit Drehwinkel α, so ist für jeden

Punkt X im Raum $pO(\, r(\, X)) = r(\, pO(\, X))$. 1.5cm

r(X)

α

g

X

O

P (X)

O

P (r(X))

O

Bild 1.15

Es gilt also

$pO \circ r = r \circ pO$

(1.3)

für jede Drehung r um eine Achse durch O. Insbesondere kommt es also in

Punkt 4 von Satz 1.2 nicht auf die Reihenfolge der Hintereinanderschaltung

an.

iii) Jede Spiegelung s an einer Ebene E durch O läßt sich in der Form $s = pO \circ r$

schreiben, wobei r die Drehung um 180 ◦ um die Achse durch O senkrecht zu

E ist.

Um den Beweis von Satz 1.2 vorzubereiten, formulieren wir zunächst einen Hilfs-

satz oder, wie man auch sagt, ein Lemma.

Lemma 3 *Sei O ein Punkt im Raum und ϕ eine Isometrie des Raums, die O als*

Fixpunkt hat. Dann gibt es einen Punkt P im Raum, der von O verschieden ist, so

daß

$\phi(P) = P$

oder

$\phi(P) = pO(P)$

(d.h. P wird entweder auf sich oder auf den bzgl. O antipodalen Punkt abgebildet).

Beweis Wir bezeichnen mit $S2$ die Menge aller Punkte im Raum, deren Abstand

von O gleich 1 ist. $S2$ ist die Oberfläche der Kugel mit Radius 1 um O, oder, wie

man auch sagt, die *Sph¨*

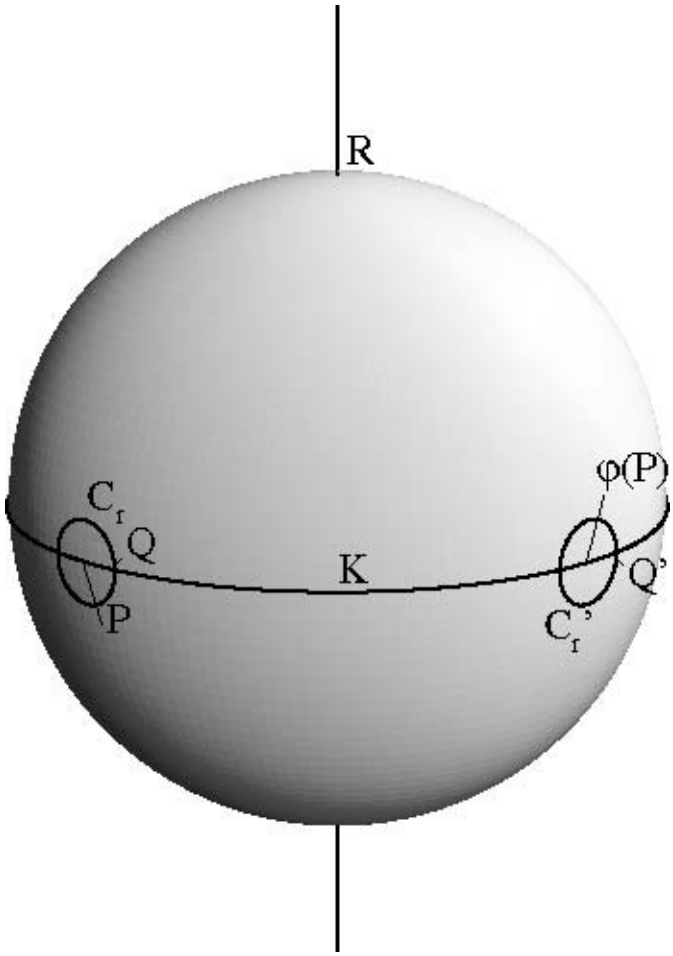
are mit Radius 1 um O. Auf $S2$ definieren wir eine Funktion,

d.h. eine Abbildung

$f : S2 \longrightarrow \mathrm{R}$

indem wir jedem Punkt X auf $S2$ das Minimum des Abstandes von X zu $\phi(X)$ und

des Abstandes von X zu $pO(\phi(X))$ zuordnen.



1 Symmetriegruppen

Wir wollen zeigen, daß es einen Punkt P auf der Sphäre S 2 gibt, so daß $f(P) = 0$.

Nach Definition wäre dann $\phi(P) = P$ oder $\phi(P) = pO(P)$ und Lemma 3 wäre bewiesen.

Wir verwenden nun ohne Beweis zwei Sätze aus der Analysis, nämlich

1. Die oben definierte Funktion $f : S\,2 \longrightarrow \mathrm{R}$ ist stetig.

2. Jede stetige Funktion auf S 2 nimmt ihr Minimum an.

Diese beiden Aussagen implizieren, daß es einen Punkt P auf der Sphäre S 2

gibt,

so daß

$f(P) \leq f(X)$ für alle Punkte X auf S^2.

Wir setzen $d = f(P)$ und wollen zeigen, daß $d = 0$. Nehmen wir also an, daß $d = 0$

und versuchen, diese Annahme zum Widerspruch zu führen. Indem wir eventuell ϕ

durch $pO \circ \phi$ ersetzen, können wir uns auf den Fall beschränken, daß der Abstand

von P zu $\phi(P)$ nicht größer ist als der Abstand von $\phi(P)$ zu $pO(P)$. Mit anderen Worten, wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $\phi(P)$ auf

der Hemisphäre mit Zentrum P liegt.

Für eine reelle Zahl $r > 0$ sei C_r die Menge aller Punkte auf S^2, die von P den

Abstand r haben. Ebenso bezeichne C die Menge aller Punkte auf S^2, die von $\phi(P)$

r

den Abstand r haben (siehe Bild 1.16). Da ϕ eine Isometrie ist, ist das Bild jedes

Bild 1.16

Punktes X auf C_r in C enthalten. E sei die Ebene durch die Punkte O, P und

r

$\phi(P)$. Sie schneidet die Sphäre S^2 in dem Großkreis $K := S^2 \cap E$. Falls r genügend klein gewählt war, trifft C_r den Kreis K in genau zwei Punkten. Wir bezeichnen mit

Q den näher bei $\phi(P)$ gelegenen Punkt. (Q ist eindeutig bestimmt, da $\phi(P)$

auf

.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.

der Hemisphäre mit Zentrum P liegt.) Ebenso trifft C den Kreis K in genau zwei

r

Punkten, wir bezeichnen mit Q den weiter von P entfernten Punkt. Ferner seien R

und R die Durchstoßpunkte der Geraden durch O senkrecht zur Ebene E mit der

Sphäre S 2. Wir wollen zunächst zeigen, daß $\phi(Q) = Q$. Q ist der einzige Punkt

von C , dessen Abstand von Q gleich dem Abstand d von P zu $\phi(P)$ ist, denn nach r

den Ergebnissen der obigen Übung treffen sich die Sphäre S 2, die Sphäre um $\phi(P)$

mit Radius r und die Sphäre um Q mit Radius d in höchstens zwei Punkten, die

symmetrisch bezüglich der Ebene E liegen. Q ist aber ein Schnittpunkt, also liegen

alle Schnittpunkte dieser drei Sphären in E. Man sieht leicht, daß es in E genau einen Schnittpunkt gibt.

Für jeden anderen Punkt von C ist der Abstand zu Q kleiner als d. Nach Defi-

r

nition von d kommen diese Punkte als Bildpunkte von Q nicht in Frage, also ist

$\phi(Q) = Q$

Sei ρ der Abstand PR von P zu R. Dann ist

$\rho = PR = QR = QR = QR = QR = \phi(P)R = \phi(P)R$

$\sqrt{}$

Wenn Sie wollen, können Sie sich überlegen, daß $\rho =$

2. Die Sphäre S 2, die Sphäre

um P mit Radius ρ und die Sphäre um Q mit Radius ρ treffen sich in genau zwei Punkten, nämlich in R und R . Also sind R und R die einzigen zwei Punkte auf S 2,

die sowohl von P als auch von Q den Abstand ρ haben. Ebenso sind R und R die einzigen Punkte auf der Sphäre S 2, die von $\phi(P)$ und $\phi(Q) = Q$ den Abstand ρ haben.

Da ϕ eine Isometrie ist, ist folglich

$\phi(R) = R$

oder

$\phi(R) = R$.

Nun ist aber $R = pO(R)$, also ist

$f(R) = 0$.

Das ist ein Widerspruch zu unserer Annahme, daß das Minimum d von f auf S 2

größer als Null ist. Damit ist der Beweis von Lemma 3 beendet. ✷

Beweis von Satz 1.2 Wir machen wieder eine Fallunterscheidung.

1. Fall : ϕ hat zwei Fixpunkte P , Q so, daß O,P und Q nicht auf einer Geraden liegen.

Es sei E die von O,P,Q aufgespannte Ebene und s die Spiegelung an E. Für jeden

Punkt X, der nicht auf E liegt, treffen sich die Sphäre um O mit Radius OX, die

Sphäre um P mit Radius PX und die Sphäre um Q mit Radius QX in genau zwei

Punkten, nämlich X und $s(X)$. Somit gilt $\phi(X) = X$ oder $\phi(X) = s(X)$ für jeden Punkt X, der nicht auf der Ebene E liegt.

Ähnlich zeigt man, daß

$\phi(X) = X = s(X)$

für alle Punkte X auf E.

Wie im Beweis von Satz 1.1 folgert man daraus, daß

$\phi = s$

oder

$\phi = id$.

2. Fall : ϕ hat einen von O verschiedenen Fixpunkt P , aber jeder Fixpunkt von ϕ liegt auf der Geraden g durch O und P .

Jeder Punkt X auf g ist im Raum durch seine Abstände von O und von P charakterisiert. Da $\phi(O) = O, \phi(P) = P$ und ϕ eine Isometrie ist, folgt

$\phi(X) = X$

für alle

$X \in g$.

Für jedes $X \in g$ sei nun EX die Ebene durch X senkrecht zu g.

EX

O

P

P

X

P

1

2

Bild 1.17

Es gilt

Für alle Punkte Y von EX liegt auch $\phi(Y)$ auf EX .

(1.4)

Um (1.4) zu zeigen, betrachten wir die beiden Punkte P_1, P_2 auf g, die von X

den

Abstand 1 haben. Dann ist EX die Menge aller derjenigen Punkte Y , die von P 1 und

P 2 den gleichen Abstand haben. Da ϕ eine Isometrie ist und P 1 und P 2 Fixpunkte

von ϕ sind, folgt (1.4).

Wegen (1.4) ist die Einschränkung ϕX von ϕ auf EX eine Isometrie der Ebene

EX , die den Punkt X festläßt. Nach der unter Fall 2“ gemachten Voraussetzung

”

gibt es keinen von X verschiedenen Punkt Y auf EX so daß ϕ (Y) = Y . Folglich ist ϕX eine Drehung um den Punkt X mit Winkel αX , wobei $0 < \alpha X < 360 \circ$.

Wir zeigen nun, daß αX nicht von X abhängt. Sei also X ein weiterer Punkt

von g. Wähle einen Punkt Y auf der Ebene EX , der von X verschieden ist. Mit Y

bezeichnen wir den Durchstichpunkt der Parallelen zu g durch Y mit der Ebene von

EX (siehe Bild 1.18).

Wenn $\alpha X = \alpha X$ wäre, so wäre der Abstand von ϕ (Y) und ϕ (Y) größer als der

Abstand von Y und Y . Dies ist aber unmöglich, da ϕ eine Isometrie ist.

Also ist ϕX eine Drehung um einen von X unabhängigen Winkel α. Dies zeigt,

daß ϕ die Drehung um die Achse g mit Winkel α ist.

3. Fall : ϕ hat keinen von O verschiedenen Fixpunkt.

Nach Lemma 3 gibt es dann einen von O verschiedenen Punkt P , so daß ϕ (P) =

pO (P). Setze

$\psi := pO \circ \phi$

.

1.1 Isometrien der Ebene und des Raums

15

Y

Y’

X

X’

g

EX’

Bild 1.18

Dann ist

$\phi = id \circ \phi = (pO \circ pO) \circ \phi = pO \circ \psi$

(1.5)

und ψ (P) = P . Nach den Ergebnissen aus Fall 1 und Fall 2 ist ψ entweder eine

Spiegelung an einer Ebene E, die O und P enthält, oder eine Drehung um die Gerade

durch O und P mit einem Winkel α mit $0 < \alpha < 360 \circ$, oder gleich der Identität.

Die erste Alternative tritt nicht ein, denn dann würde $\phi = pO \circ \psi$ alle Punkte der

zu E senkrechten Geraden durch O auf sich abbilden, im Gegensatz zu der in Fall

”

3“ gemachten Voraussetzung. Die zweite Alternative impliziert, daß $\phi = pO \circ \psi$ die

Hintereinanderschaltung der Punktspiegelung an O mit der Drehung um die Achse

OP mit Winkel α ist. Wäre $\alpha = 180 \circ$, so würde ϕ jeden Punkt der Ebene senkrecht

zur Achse OP durch O auf sich abbilden, im Gegensatz zu der in Fall 3“ gemachten

”

Voraussetzung.

Falls die dritte der obigen Alternativen eintritt, ist $\phi = pO$.

Damit ist Satz 1.2 bewiesen. ✷

Bemerkung 4

1. Die Sätze 1.1 und 1.2 geben einen Überblick über alle Isome-

trien der Ebene bzw. des Raumes, die mindestens einen Punkt festlassen. Um

daraus einen Überblick über alle möglichen Isometrien der Ebene (bzw. des

Raumes) zu gewinnen, geht man folgendermaßen vor:

Sei ϕ irgendeine Isometrie der Ebene bzw. des Raumes. Wähle einen Punkt O

in der Ebene bzw. im Raum. Im allgemeinen wird der Punkt $\phi(O)$ vom Punkt

O verschieden sein. Bezeichne mit t die Translation, die den Punkt O auf den

Punkt $\phi(O)$ abbildet und mit t die Translation, die den Punkt $\phi(O)$ auf den

Punkt O abbildet.

Offensichtlich gilt:

$t \circ t = t \circ t = id$

.

Die Abbildung $\psi := t \circ \phi$ ist wiederum eine Isometrie, und man prüft leicht nach, daß sie den Punkt O auf sich abbildet. Man kann also Satz 1.1 auf die Abbildung ψ anwenden. Da

$\phi = (t \circ t) \circ \phi = t \circ (t \circ \phi) = t \circ \psi$

sieht man:

Jede Isometrie der Ebene (bzw. des Raumes) ist Hintereinanderschaltung einer Translation und einer Isometrie, die einen Punkt festl¨

aßt.

2. Man nennt eine Abbildung ϕ der Ebene (bzw. des Raumes) auf sich *bijektiv* , falls es für jeden Punkt Y einen und nur einen Punkt X gibt, so daß $\phi (X) = Y$. Beispiele von bijektiven Abbildungen sind Translationen, Spiegelungen an einer Achse in der Ebene, Drehungen um einen Punkt in der Ebene, Spiegelungen an einer Ebene im Raum, Drehungen um eine Achse im Raum, Punktspiegelungen im Raum und natürlich die identische Abbildung id . Man überzeugt sich leicht, daß für zwei bijektive Abbildungen ϕ und ψ auch die Hintereinanderschaltung $\phi \circ \psi$ bijektiv ist. Satz 1.1, Satz 1.2 und der erste

Teil dieser Bemerkung zeigen dann:

Jede Isometrie der Ebene bzw. des Raumes ist bijektiv.

Ist ϕ eine bijektive Abbildung, so bezeichnet man mit $\phi - 1$ die Abbildung, die jedem Punkt X den eindeutig bestimmten Punkt Y zuordnet, für den $\phi(Y) = X$ gilt. $\phi - 1$ heißt die zu ϕ *inverse Abbildung*.

Offensichtlich gilt:

$$\phi \circ \phi - 1 = \phi - 1 \circ \phi = id$$

Ist nun ϕ eine Isometrie, so ist auch die Abbildung $\phi - 1$ eine Isometrie. Um dies zu beweisen, betrachten wir zwei Punkte X und Y in der Ebene (bzw. im Raum) und setzen

$$X := \phi - 1(X)$$

,

$$Y := \phi - 1(Y).$$

Da ϕ eine Isometrie ist, ist der Abstand von X und Y

gleich dem Abstand

von $\phi(X) = X$ von dem Punkt $\phi(Y) = Y$.

Wir sehen also: Isometrien sind bijektive Abbildungen der Ebene bzw. des Raumes, die Identität *id* ist eine Isometrie, die Hintereinanderschaltung zweier Isometrien ist eine Isometrie, und das Inverse einer Isometrie ist eine Isometrie.

1.1 Isometrien der Ebene und des Raums

O

Bild 1.19

Nun wollen wir die Isometrien betrachten, die einen Würfel auf sich abbilden. Da

jede Isometrie des Würfels Ecken auf Ecken abbildet, und der Schwerpunkt O des

Würfels als derjenige Punkt charakterisiert werden kann, der gleichen Abstand von

allen Ecken hat, hat jede Isometrie des Würfels den Schwerpunkt O als Fixpunkt.

Wir können also Satz 2 anwenden, und sehen, daß jede Isometrie des Würfels

i) eine Drehung um eine Achse durch O, oder

ii) eine Spiegelung an einer Ebene durch O, oder

iii) Hintereinanderschaltung der Punktspiegelung pO am Punkt O und einer Dre-

hung um eine Achse durch O mit Drehwinkel $0 < \alpha < 360\,^\circ$, $\alpha = 180\,^\circ$, oder

iv) die Punktspiegelung pO selbst, oder

v) die Identität ist.

Offensichtlich sind die beiden letztgenannten Abbildungen pO und id Isometrien, die

den Würfel auf sich abbilden. Wir müssen also noch die Abbildungen vom Typ (i),

(ii), (iii) bestimmen, die den Würfel auf sich abbilden.

Sei zunächst r eine Drehung um eine Achse g durch O um einen Winkel α mit

$0 < \alpha < 360\,^\circ$, die den Würfel in sich überführt. Q sei einer der Durchstoßpunkte

der Geraden g mit der Würfeloberfläche. Dann gibt es drei Möglichkeiten, nämlich

• Q liegt im Inneren einer Seitenfläche, oder

• Q liegt auf einer Kante des Würfels, ist aber keine Ecke, oder

• Q ist eine Ecke des Würfels.

Da r den Würfel in sich überführt, ist im ersten Fall Q der Mittelpunkt der Seiten-

fläche, und α ist $90\,^\circ$, $180\,^\circ$ oder $270\,^\circ$. Im zweiten Fall ist Q Mittelpunkt der Kante,

und $\alpha = 180\,^\circ$. Schließlich ist im dritten Fall $\alpha = 120\,^\circ$ oder $240\,^\circ$. Wählt man einen

Punkt Q wie oben, so ist die entsprechende Abbildung auch wirklich eine Symme-

trie des Würfels. Wir listen noch einmal alle Drehungen auf, die den Würfel in sich

überführen (vgl. Bild 1.20):

a) Drehung um eine Achse durch die Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Sei-

tenflächen um einen Winkel von $90\,^\circ$, $180\,^\circ$ oder $270\,^\circ$.

b) Drehung um eine Achse durch die Mittelpunkte zweier gegenüberliegender

Kanten um den Winkel $180\,^\circ$.

c) Drehung um eine Achse durch zwei gegenüberliegende Ecken um einen Winkel

von 120 ◦ oder 240 ◦.

Bild 1.20

Es gibt drei Achsen wie in (a), sechs Achsen wie in (b), und vier Achsen wie in (c).

Insgesamt gibt es also

$3 \cdot 3 + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 4 = 23$

Drehungen, die den Würfel in sich überführen. Davon haben 14 einen von 180 ◦

verschiedenen Winkel.

Betrachten wir nun Spiegelungen *s* an einer Ebene *E*, die den Würfel in sich

überführen. Die Durchstoßlinien von *E* mit den Seitenflächen des Würfels sind dann

Symmetrieachsen der Seitenflächen. Die Seitenflächen sind Quadrate; und ein Qua-

drat hat nur zwei Typen von Symmetrieachsen, nämlich Verbindungsgeraden zweier

gegenüberliegender Ecken und Verbindungsgeraden zweier gegenüberliegender Kan-

tenmittelpunkte (vgl. Bild 1.21). *E* ist durch seine Durchstoßlinie mit einer Seiten-

fläche bereits bestimmt (*E* ist die Ebene durch *O* und diese Durchstoßlinie). Man

erhält folgende Spiegelungen, die den Würfel in sich überführen (vgl. Bild 1.22):

d) Spiegelung an einer Ebene durch die Mittelpunkte von vier parallelen Kanten.

e) Spiegelung an einer Ebene durch zwei diagonal gegenüberliegende Kanten.

Es gibt drei Ebenen wie in (d) und sechs Ebenen wie in (e), insgesamt also neun

Spiegelungen, die den Würfel auf sich abbilden.

Bild 1.21

E

E

Bild1.22

Betrachten wir schließlich Abbildungen der Form $\phi = pO \circ r$, die den Würfel auf

sich abbilden und für die r eine Drehung um eine Achse durch O um einen Winkel α

mit $0 < \alpha < 360 \circ$, $\alpha = 180 \circ$ ist. Dann ist auch $r = pO \circ \phi$ eine Isometrie des Würfels.

r ist also eine der 14 Drehungen aus (a), (b), (c), die einen von $180 \circ$ verschiedenen

Drehwinkel hat. Für jede dieser 14 Drehungen r ist umgekehrt $pO \circ r$ eine Symmetrie

des Würfels, also gibt es genau 14 Isometrien des Würfels von Typ (iii).

Zählen wir alle Isometrien unter (i)–(v) zusammen, so sehen wir, daß es (ein-

schließlich der Identität *id*) genau 48 Isometrien des Raumes gibt, die den Würfel

auf sich abbilden.

Wir können jetzt versuchen, präzise zu formulieren, wann zwei Teilmengen *M*

und *M* der Ebene bzw. des Raumes die gleiche Symmetrie haben. Die Idee ist, zu

sagen, daß dies genau dann der Fall ist, wenn sie

im wesentlichen“ die gleichen

”

Isometrien zulassen. Das im wesentlichen“ ist noch nötig, weil wir *M* und *M* erst

”

in eine passende Lage bringen müssen. Dies kann durch eine Isometrie ψ geschehen.

Definition 5 *Seien M und M zwei Teilmengen der Ebene (bzw. im Raum). Wir*

sagen, M und M haben die gleiche Symmetrie *, falls es eine Isometrie ψ der Ebene*

(bzw. des Raumes) gibt, so daß jede Isometrie, die M auf sich abbildet, auch ψ(
M)

auf sich abbildet, und umgekehrt.

.

In diesem Sinn haben dann z.B. der Würfel und das reguläre Oktaeder die glei-

che Symmetrie, denn die Mittelpunkte der Seitenflächen eines Würfels bilden ein

Oktaeder und umgekehrt (vgl. Bild 1.23).

Bild 1.23

Bemerkung 6 Die Menge $Iso(M)$ aller Isometrien, die eine gegebene Teilmenge M

der Ebene bzw. des Raums in sich überführen, hat eine besondere innere Struktur“,

”

nämlich:

• Sind $\phi,\psi \in Iso(M)$, so liegt auch die Hintereinanderschaltung $\phi\circ\psi$ in $Iso(M)$.

• Jedes $\phi \in Iso(M)$ ist bijektiv, und die inverse Abbildung ϕ^{-1} liegt wieder in

$Iso(M)$.

Dies gilt natürlich auch, wenn M die ganze Ebene bzw. der ganze Raum ist. Im

nächsten Abschnitt werden wir diese Eigenschaften weiter abstrahieren.

..

Ubung: (i) Seien A_1 , A_2 , A_3 Punkte der Ebene, die nicht auf einer Geraden liegen.

Sind ϕ und ψ Isometrien der Ebene, so daß $\phi(A_i) = \psi(A_i)$ für $i = 1, 2, 3$, so ist $\phi = \psi$!

(ii) Seien A_1 , A_2 , A_3 , A_4 Punkte im Raum, die nicht in einer Ebene liegen. Sind ϕ

und ψ Isometrien des Raums mit $\phi(A_i) = \psi(A_i)$ für $i = 1, \ldots, 4$, so ist $\phi = \psi$!

(iii) Beweisen Sie (i) und (ii) ohne auf Satz 1.1 bzw. Satz 1.2 Bezug zu nehmen!

Überlegen Sie sich dann, daß (i) und (ii) die Beweise von Satz 1.1 und 1.2 erleichtern!

..

Ubung: Bestimmen Sie alle Isometrien des Raums, die ein gegebenes reguläres Te-

traeder in sich überführen!

1.2

Gruppen und Gruppenoperationen

Im vorigen Abschnitt betrachteten wir Isometrien der Ebene bzw. des Raums. Dies

sind spezielle Abbildungen der Ebene bzw. des Raums auf sich. Auf der Menge aller

Abbildungen der Ebene bzw. des Raums auf sich ist eine Verknüpfung definiert,

nämlich die Hintereinanderschaltung: Sind $\phi 1$,$\phi 2$ Abbildungen der Ebene bzw. des

Raums auf sich, so ist die Hintereinanderschaltung $\phi 1 \circ \phi 2$ dieser beiden Abbildungen

definiert als diejenige Abbildung, die jeden Punkt X auf den Punkt $\phi 1(\phi 2(X))$

abbildet. Es gilt das Assoziativgesetz

$(\phi 1 \circ \phi 2) \circ \phi 3 = \phi 1 \circ (\phi 2 \circ \phi 3)$

.

denn für jeden Punkt X ist

$[(\phi 1 \circ \phi 2) \circ \phi 3](X) = (\phi 1 \circ \phi 2)(\phi 3(X)) = \phi 1 \phi 2(\phi 3(X))$ und ebenso ist

$[\phi 1 \circ (\phi 2 \circ \phi 3)](X) = \phi 1 ([\phi 2 \circ \phi 3](X)) = \phi 1 \phi 2(\phi 3(X))$ Um weiter zu abstrahieren, definieren wir

Definition 7 *Eine* Verknüpfung *auf einer Menge* M *ist eine Abbildung*

$\circ : M \times M \longrightarrow$

M

(x,y)

$\longrightarrow x \circ y$

Sie heißt assoziativ *, falls*

$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$

f¨

ur alle x,y,z ∈ M

Beispiele f¨

ur assoziative Verkn¨

upfungen

1. Sei M irgendeine Menge, M die Menge aller Abbildungen $\phi : M \to M$ von M auf sich, und die Verknüpfung ◦ sei definiert als die Hintereinanderschaltung von Abbildungen:

$(\phi 1 \circ \phi 2)(x) := \phi 1\, \phi 2(x)$

für $\phi 1, \phi 2 \in M, x \in M$

Wie oben verifiziert man, daß dies eine assoziative Verknüpfung auf M ist.

2. M = N (die Menge der natürlichen Zahlen), mit der Addition

$+ :$

$N \times N \longrightarrow$

N

(x,y)

$\longrightarrow x+y$

als Verknüpfung.

3. M = N, mit der Multiplikation

$\cdot : \mathrm{N} \times \mathrm{N} \longrightarrow$

N

(x,y)

$\longrightarrow x \cdot y$

als Verknüpfung.

Ist $\circ$ eine assoziative Verknüpfung auf einer Menge M, so schreibt man für $x,y,z \in$ M

auch

$x \circ y \circ z$

statt

$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$

Durch vollständige Induktion kann man zeigen, daß man die Verknüpfung von n

Elementen $x_1, \ldots, x_n$ von M beliebig klammern kann; man schreibt auch

$x_1 \circ x_2 \circ \cdots \circ x_n$

für das entstehende Element von M. Ferner definieren wir für $x \in$ M

x 2

:=

$x \circ x$

x 3

:=

$x \circ x \circ x$

...

xn

:=

$x \circ xn-$ 1

für $n \geq 2$

Wir wollen nun die in Bemerkung 6 aufgeführten Eigenschaften der Menge aller

Isometrien, die eine gegebene Teilmenge der Ebene bzw. des Raums auf sich abbilden,

abstrakter fassen.

Definition 8 *Eine* Gruppe *ist eine Menge G, zusammen mit einer assoziativen*

Verkn¨

upfung $\circ : G \times G \to G$*, so daß gilt:*

i) Es gibt ein Element $e \in G$*, so daß*

$g \circ e = e \circ g = g$

$f^{\cdot}$

ur alle $g \in G$.

e heißt das neutrale Element *der Gruppe.*

ii) $F^{\cdot\cdot}$

ur jedes Element g von G gibt es ein Element $g-1$ *in*

G, so daß

$g \circ g-1 = g-1 \circ g = e$

$g-1$ *heißt das zu g* inverse Element .

Beispiele von Gruppen

1. *G* sei die Menge Iso aller Isometrien der Ebene (bzw. des Raums). Die Verknüpfung sei die Hintereinanderschaltung von Abbildungen. Bemerkung 6 zeigt, daß *G* mit dieser Verknüpfung eine Gruppe bildet; das neutrale Element ist die identische Abbildung *id* , und das inverse Element zu ϕ ist die inverse Abbildung $\phi-1$.

2. Die Menge Z aller ganzen Zahlen, mit der Addition

$+ :$

$Z \times Z \longrightarrow$

Z

(x,y)

$\longrightarrow x + y$

als Verknüpfung ist eine Gruppe. Das neutrale Element ist 0, das inverse Ele-

ment zu x ist $-x$.

3. Die Menge Q $*$ aller von Null verschiedenen rationalen Zahlen, mit der Multiplikation als Verknüpfung, ist eine Gruppe. Das neutrale Element ist 1, das inverse Element zu q ist $1 / q$.

1.2 Gruppen und Gruppenoperationen

Bemerkungen

1. Ist G, zusammen mit der Verknüpfung $\circ$, eine Gruppe, so ist das neutrale Element eindeutig. Ist nämlich e irgendein Element von G, so daß

$e \circ g = g$ für alle $g \in G$

so ist insbesondere

$e \circ e = e$

Andererseits ist nach der Eigenschaft (i) in der Definition

$e \circ e = e$

Somit ist $e = e$.

2. Ist G, zusammen mit der Verknüpfung $\circ$, eine Gruppe, so ist das inverse Element eines jeden Elements $g \in G$ eindeutig.

Ist nämlich $g \in G$, so daß

$g \circ g = e$

so ist

$g = g \circ e = g \circ (g \circ g^{-1}) = (g \circ g) \circ g^{-1} = e \circ g^{-1} = g^{-1}$

3. In der Definition des Begriffs Gruppe haben wir mehr Bedingungen gestellt, als eigentlich notwendig wären. Es hätte genügt, die folgenden beiden Bedingungen zu stellen:

(i') Es gibt ein Element $e \in G$, so daß

$e \circ g = g$

für alle $g \in G$

(ii') Für jedes $g \in G$ gibt es eine Element $g^{-1} \in G$, so daß

$g^{-1} \circ g = e$

(i) und (ii) können nämlich aus (i') und (ii') und der Assoziativität hergeleitet werden (siehe z.B. [van der Waerden 1936] § 6).

Definition 9 *Es sei G, zusammen mit der Verkn¨*

upfung ◦, eine Gruppe.

a) Die Anzahl der Elemente von G heißt die Ordnung *von G. Sie kann endlich oder unendlich sein. Wir bezeichnen sie mit* $|G|$.

b) Die Gruppe heißt kommutativ *oder* Abelsch1 *, falls*

$g \circ h = h \circ g$

f¨

ur alle $g,h \in G$.

1 Nach dem Mathematiker Niels H. Abel (1802–1829).

c) Eine Teilmenge H von G heißt Untergruppe *von G, falls*

$e \in H$

$g \circ h \in H$

$f^{\cdot}$

ur alle $g, h \in H$

$g^{-1} \in H$

$f^{\cdot}$

ur jedes $g \in H$.

Ist H eine Untergruppe von G, so ist H, zusammen mit der Einschr¨

ankung

von $\circ$ *auf* $H \times H$*, wieder eine Gruppe.*

Beispiele

1. Die Gruppen (Z , +) und (Q $*$,·) aus den Beispielen 2 und 3 oben sind kommu-

tativ, nicht jedoch die Gruppe aller Isometrien der Ebene bzw. des Raums.

¨

Ubung: Finden Sie zwei Isometrien ϕ, ψ der Ebene, so daß $\phi \circ \psi = \psi \circ \phi$!

2. Ist M eine Teilmenge der Ebene (bzw. des Raums), so ist nach Bemerkung 6

die Menge Iso(M) aller Isometrien, die M auf sich abbilden, eine Untergruppe

der Gruppe aller Isometrien der Ebene (bzw. des Raums). Wir nennen Iso(M)

die (volle) *Symmetriegruppe* von M .

3. Im letzten Abschnitt haben wir festgestellt, daß die Gruppe aller Isometrien der

Ebene, die ein gegebenes gleichseitiges Dreieck auf sich abbilden, die Ordnung

6 hat. Ebenso hat die (volle) Symmetriegruppe eines Würfels die Ordnung 48.

4. Ist n irgendeine ganze Zahl, so bezeichnen wir mit

$n \cdot \mathrm{Z} := \{ n\, x \mid x \in \mathrm{Z} \}$

die Menge der durch n teilbaren ganzen Zahlen. Dann ist n Z eine Untergruppe

der Gruppe Z (mit der Addition als Verknüpfung).

5. Man kann aus den acht Ecken eines Würfels vier so auswählen, daß sie ein

reguläres Tetraeder bilden (vgl. Bild 1.24). 1.5cm

Bild 1.24

1.2 Gruppen und Gruppenoperationen

Jede Isometrie, die dieses Tetraeder in sich überführt, bildet auch den ganzen Würfel auf sich ab. Die Symmetriegruppe des Tetraeders ist also eine Untergruppe der Symmetriegruppe des Würfels. Die vier nicht verwendeten Ecken des Würfels bilden übrigens ebenfalls ein reguläres Tetraeder, es heißt das zum ersten *duale Tetraeder*.

Ist G, zusammen mit der Verknüpfung $\circ$, eine Gruppe endlicher Ordnung, so codiert man die Rechenregeln in der Gruppe manchmal folgendermaßen: Man bildet ein quadratisches Schema, indem man horizontal und vertikal die Elemente $g_1, \cdots, g_n$ von G einträgt (hier ist $n = |G|$, und meistens wählt man $g_1 = e$), ähnlich wie bei einer Entfernungstabelle in einem Autoatlas. In das Kästchen neben g_i und unter g_j des entstehenden Rasters trägt man das Produkt $g_i \circ g_j$ ein.

Tabelle 1.1

$e = g_1$

g_2

g_3

. . .

g_j

. . .

gn

$e = g\ 1$

e

$g\ 2$

$g\ 3$

$\cdots$

gj

$\cdots$

gn

$g\ 2$

$g\ 2$

$g\ 2 \circ g\ 2\ g\ 2 \circ g\ 3 \cdots$

$g\ 2 \circ gj \cdots$

$g\ 2 \circ gn$

$g\ 3$

$g\ 3$

$g\ 3 \circ g\ 2\ g\ 3 \circ g\ 3 \cdots$

$g\ 3 \circ gj \cdots$

$g\ 3 \circ gn$

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

..

..

..

. .

..

. .

..

gi

gi

$gi \circ g$ 2

$gi \circ g$ 3 · · ·

$gi \circ gj$

· · ·

$gi \circ gn$

..

.

.

.

.

.

.

.

.

..

..

..

. .

..

. .

..

gn

gn

$gn \circ g\ 2\ gn \circ g\ 3 \cdots gn \circ gj \cdots gn \circ gn$

Das entstehende Schema nennt man die *Gruppentafel* von G (vgl. Tabelle 1.1).

Beispiel: Sei G die Symmetriegruppe eines gleichseitigen Dreiecks (vgl. Bild 1.6).

Sie hat sechs Elemente, nämlich die identische Abbildung id , die Drehung

ϕ 1 (bzw. ϕ 2) um den Mittelpunkt des Dreiecks mit Winkel 120 ◦ und 240 ◦,

sowie die Spiegelungen ψi an den Achsen durch die Ecken Ai und die Ai

gegenüberliegenden Kantenmittelpunkte. Als Gruppentafel ergibt sich Tabelle

1.2.

Tabelle 1.2

id

ϕ 1 ϕ 2 ψ 1 ψ 2 ψ 3

id

id

ϕ 1 ϕ 2 ψ 1 ψ 2 ψ 3

ϕ 1

ϕ 1 ϕ 2

id

ψ 3 ψ 1 ψ 2

ϕ 2

ϕ 2

id

ϕ 1 ψ 2 ψ 3 ψ 1

$\psi 1$

$\psi 1 \psi 2 \psi 3$

id

$\phi 1 \phi 2$

$\psi 2$

$\psi 2 \psi 3 \psi 1 \phi 2$

id

$\phi 1$

$\psi 3$

$\psi 3 \psi 1 \psi 2 \phi 1 \phi 2$

id

Aus der Gruppentafel sieht man, daß $H := \{ id, \phi 1, \phi 2 \}$ eine Untergruppe von G ist. Dies kann man aber auch geometrisch begründen: H besteht aus

denjenigen Elementen von G, die die Orientierung erhalten. Es ist klar, daß id die Orientierung erhält, und ebenso, daß mit zwei orientierungserhaltenden Elementen ϕ, ϕ auch $\phi \circ \phi$ und $\phi - 1$ die Orientierung erhalten.

Weitere Beispiele von Gruppen

1. Sei M irgendeine Menge. Mit $\sigma(M)$ bezeichnen wir die Menge der bijektiven

Abbildungen von M auf sich. Zusammen mit der Hintereinanderschaltung von Abbildungen als Verknüpfung ist dies eine Gruppe. Das neutrale Element ist wieder die identische Abbildung id ; und das inverse Element zu einem Element ϕ von $\sigma(M)$ ist die inverse Abbildung $\phi - 1$.

Ist insbesondere $M := \{ 1 , . . . ,n\}$, so schreibt man auch Sn statt $\sigma(M)$. Diese Gruppe heißt die *symmetrische Gruppe* auf n Elementen, ihre Elemente *Permutationen*. Üblicherweise beschreibt man eine Permutation $\sigma \in Sn$, indem man unter die Zahlen $1 , . . . ,n$ die Zahlen $\sigma(1) , . . . ,\sigma(n)$ schreibt und um das Ganze eine große Klammer setzt. So ist

1

2

3

4

5

$\sigma :=$

3

4

5

1

2

das Element von S 5, das 1 auf 3, 2 auf 4, 3 auf 5, 4 auf 1 und 5 auf 2 abbildet.

2. Die *Zopfgruppen*: Diese Gruppen können wir zum gegenwärtigen Zeitpunkt

nicht mit derselben mathematischen Präzision beschreiben wie die bisher betrachteten Beispiele von Gruppen — ich hoffe, Sie lassen sich davon nicht abschrecken. Ein Zopf mit n Strängen entsteht folgendermaßen: Man gebe sich n Anfangspunkte $A_1, \ldots, A_n$ in einer Ebene E_1 und n Endpunkte $B_1, \ldots, B_n$ in einer zu E_1 parallelen Ebene E_2 vor, so daß es eine Translation T im Raum gibt mit $T(E_1) = E_2$ und $T(A_j) = B_j$ für $j = 1, \ldots, n$. Dann spanne man n Fäden dazwischen, die stets in Richtung von E_1 nach E_2 verlaufen, und so, daß in jedem A_j genau ein Faden beginnt und in jedem B_k genau ein Faden endet:

An

Bn

E1

A2

E2

B

A

2

1

B1

Zwei solche Gebilde ergeben denselben Zopf, wenn sie durch Verschieben der Fäden bei festem Anfangs- und Endpunkt auseinander hervorgehen. So sind etwa die folgenden beiden Zöpfe (in Draufsicht gezeichnet) gleich:

.

1.2 Gruppen und Gruppenoperationen

27

A

B

A

B

3

3

3

3

A

B

A

B

2

2

2

2

und

A

B

A

B

1

1

1

1

Bild 1.26

Andererseits ist der *triviale Zopf*, der entsteht, indem man die Punkte *Ai* und *Bi* durch parallele Stränge verbindet (Abbildung 1.27), von den oben gezeichneten Zöpfen verschieden.

A

B

3

3

A

B

2

2

A

B

1

1

Bild 1.27

Trivialer Zopf

Die Verknüpfung zweier Zöpfe mit n Strängen definiert man folgenderma-

ßen: Sind zwei Zöpfe Z_1, Z_2 mit Anfangspunkten $A_1, \ldots, A_n$ und Endpunkten

$B_1, \ldots, B_n$ gegeben, so verschiebe man den Zopf Z_2 mit der Translation T.

Dann fallen die Anfangspunkte des so verschobenen Zopfs Z mit den End-

2

punkten des Zopfes Z_1 zusammen. Nun verschweiße man die Stränge von Z_1

bzw. Z in diesen Punkten. Es entsteht wieder ein Zopf mit n Str

2

ängen, den

wir mit $Z_1 \circ Z_2$ bezeichnen (siehe Bild 1.28).

$\circ$

$=$

Bild 1.28

Die so definierte Verknüpfung von Zöpfen ist offenbar assoziativ. Sie hat den

trivialen Zopf als neutrales Element.

Das Inverse eines Zopfes erhält man, indem man ihn an der Ebene E 2 spiegelt.

So ist das Inverse von

gleich

Bild 1.29

denn der aus obigen Zöpfen zusammengesetzte Zopf in Abbildung 1.30 läßt sich

zum trivialen Zopf zurechtzupfen“.

”

Bild 1.30

Somit erhält man eine Gruppe; sie heißt die Zopfgruppe mit n Strängen. Eine

mathematisch präzise Definition der Zopfgruppe geben wir in Abschnitt 6.8.5.

Für weitere Literatur über die Zopfgruppe siehe z.B. [Klein 1926] § 89, [Moran].

3. In der Linearen Algebra wird gezeigt, daß die Menge der invertierbaren ($n\times n$)-

Matrizen über einem Körper K mit der Matrixmultiplikation als Verknüpfung

eine Gruppe bildet. Sie wird mit $GL(n, \mathrm{K})$ bezeichnet (general linear group“)

”

. Eine Untergruppe davon ist die Menge aller Matrizen mit Determinante 1;

sie wird mit $SL(n, \mathrm{K})$ (special linear group“) bezeichnet.

”

Ein Grundprinzip der modernen Mathematik ist es, zusammen mit Strukturen (wie

z.B. Gruppen) auch mit diesen Strukturen verträgliche Abbildungen zu untersuchen.

Im vorliegenden Fall führt dies zu

Definition 10 *Seien G und G Gruppen. Mit* $\circ$ *bezeichnen wir die Verknüpfung sowohl in G als auch in G . Eine Abbildung* $\phi : G \to G$ *heißt* (Gruppen-) homomorphismus , *falls*

$\phi(g \circ h) = \phi(g) \circ \phi(h)$

f¨

ur alle $g,h \in G$

Ein bijektiver Gruppenhomomorphismus heißt (Gruppen-) isomorphismus .

Beispiele f¨

ur Gruppenhomomorphismen

1. Sei Z die Gruppe der ganzen Zahlen mit der Addition als Verknüpfung, und sei *n* eine ganze Zahl. Dann ist

.

ϕ :

Z −→ Z

x

−→ $n \cdot x$

ein Gruppenhomomorphismus.

2. Es sei R die Gruppe der reellen Zahlen mit der Addition als Verknüpfung, und R $*$ die Gruppe der positiven reellen Zahlen mit der Multiplikation als

+

Verknüpfung. Dann ist

ϕ :

R $-\rightarrow$ R $*+$

x

$-\rightarrow$ ex

ein Gruppenhomomorphismus.

3. Wir bezeichnen mit Zn die Gruppe der Zöpfe mit n Strängen. Wir ordnen jedem Zopf eine Permutation $\sigma(z)$ folgendermaßen zu: Für jedes $j \leq n$ gibt es genau einen Faden des Zopfes, der im Punkt Bj endet. Dieser Faden hat einen Anfangspunkt, den wir mit $A\sigma(z)(j)$ bezeichnen. Die Abbildung $j \rightarrow \sigma(z)(j)$ ist dann eine Permutation der Zahlen 1 , . . . ,n. Ist beispielsweise z der Zopf in Abbildung 1.31,

A

B

4

4

A

B

3

3

A

B

2

2

A

B

1

1

Bild 1.31

so ist

1

2

3

4

$\sigma(z) =$

4

1

2

3

..

Ubung: Zeigen Sie, daß die oben definierte Abbildung $\sigma : Zn \to Sn$ ein Gruppenho-

momorphismus ist!

Bemerkungen

i) Ist $\phi : G \to G$ ein Gruppenhomomorphismus und bezeichnen e bzw. e das

neutrale Element in G bzw. G , so ist

$\phi(e) = e$

In der Tat, es gilt

e

$=$

$\phi(e) - 1 \circ \phi(e) = \phi(e) - 1 \circ \phi(e \circ e) = \phi(e) - 1 \circ \phi(e) \circ \phi(e)$

$=$

$e \circ \phi(e)$

$=$

$\phi(e)$

.

ii) Ist $\phi : G \to G$ eine Gruppenhomomorphismus, so ist

$- 1$

$\phi(g- 1) = \phi(g)$

für alle $g \in G$

denn

$\phi(g) \circ \phi(g^{-1}) = \phi(g \circ g^{-1}) = \phi(e) = e$

iii) Ist $\phi : G \to G$ ein Gruppenisomorphismus, so ist die inverse Abbildung

$\phi^{-1} : G \to G$ ebenfalls ein Gruppenhomomorphismus (und damit ein Grup-

penisomorphismus). Um dies zu zeigen, seien $g, h \in G$. Dann ist

$\phi\,\phi^{-1}(g) \circ \phi^{-1}(h) = \phi\,\phi^{-1}(g) \circ \phi\,\phi^{-1}(h) = g \circ h$

also ist

$\phi^{-1}(g) \circ \phi^{-1}(h) = \phi^{-1}(g \circ h)$

Man nennt zwei Gruppen G und G *isomorph*, wenn es einen Gruppenisomorphismus

zwischen G und G gibt. Es stellt sich oft die Aufgabe, eine vorgegebene Gruppe, z.B.

eine Symmetriegruppe, genau zu untersuchen. Gelingt es dann, einen Isomorphismus

mit einer Gruppe zu finden, die man schon gut kennt, so kann man mit Hilfe des

Isomorphismus alle Informationen über die bekannte Gruppe in Aussagen über die

zu untersuchende Gruppe übersetzen. Wir werden später öfter so vorgehen.

Viele der von uns betrachteten Gruppen waren Gruppen von Abbildungen einer

Menge auf sich, so z.B. die Gruppen $\sigma(M)$ oder die Gruppe Iso aller Isometrien der

Ebene bzw. des Raums. Auch diese Situation wollen wir noch etwas abstrakter und

allgemeiner fassen.

Definition 11 *Sei G eine Gruppe (mit Verkn¨*

upfung ◦ und neutralem Element e)

und M eine beliebige Menge. Eine Operation *der Gruppe G auf der Menge M ist*

eine Abbildung

$G \times M$

$- \rightarrow M$

(g,m)

$- \rightarrow g \cdot m$

f¨

ur die gilt:

i)

$(g \circ h) \cdot m = g \cdot (h \cdot m)$

f¨

ur alle $g,h \in G, m \in M$

ii)

$e \cdot m = m$

f¨

ur alle $m \in M$.

Beispiele von Gruppenoperationen

1. Ist M eine Menge und $\sigma(M)$ die Gruppe aller Bijektionen

von M auf sich, so operiert $\sigma(M)$ auf M durch

$\sigma(M) \times M \longrightarrow M$

(ϕ, m)

$\longrightarrow \phi(m)$

.

2. Sei G die Gruppe aller Isometrien des Raums, die einen vorgegebenen Würfel in sich überführen. M sei die Menge der Ecken des Würfels. Dann ist

$G \times M$

$\longrightarrow M$

(ϕ, v)

$\longrightarrow \phi(v)$

eine Gruppenoperation.

3. Ist K ein Körper, so operiert $GL(n, \mathrm{K})$ auf K^n durch

$GL(n, \mathrm{K}) \times \mathrm{K}^n \longrightarrow \mathrm{K}^n$

(A, v)

$\longrightarrow A \cdot v$

Bemerkung

Ist

$G \times M$

$-\rightarrow M$

(g,m)

$-\rightarrow g \cdot m$

eine Operation der Gruppe G auf der Menge M , so gilt

$m = g \cdot m \Longleftrightarrow m = g-1 \cdot m$

für alle $m,m \in M,g \in G,$

(1.6)

denn ist $m = g \cdot m$, so ist $m = e \cdot m = (g-1 \circ g) \cdot m = g-1 \cdot (g \cdot m) = g-1 \cdot m$.
Die umgekehrte Richtung zeigt man genauso.

Definition 12 *Es sei G eine Gruppe, M eine Menge, und*

$G \times M$

$-\rightarrow M$

(g,m)

$-\rightarrow g \cdot m$

eine Gruppenoperation.

i) Ist $g \in G$, $m \in M$ *, so daß* $g \cdot m = m$, *so heißt m ein* Fixpunkt *von g.*

ii) Ist $m \in M$ *, so heißt*

$StabG(m) := \{ g \in G \mid g \cdot m = m \}$

die Stabilisatoruntergruppe *(oder auch* Standgruppe *oder* Isotropiegruppe *)*

von m in G.

..

Ubung: Zeigen Sie, daß StabG(m) eine Untergruppe von G ist!

iii) Ist allgemeiner N eine Teilmenge von M , so heißt

StabG(N) := { g ∈ G | g · n ∈ N und g− 1 · n ∈ N für alle n ∈ N }

die Stabilisatoruntergruppe von N.

.

.

iv) Ist m ∈ M , so heißt

G · m = { g · m | g ∈ G }

der Orbit *(oder die* Bahn *) von m bez¨*

uglich der Operation von G. Der Orbit

von m ist also eine Teilmenge von M .

v) Die Operation von G auf M heißt transitiv *, falls es f¨*

ur je zwei Elemente m,m

von M ein Element g ∈ G gibt, so daß

g · m = m

Satz 1.3 *Gegeben sei eine Gruppenoperation*

G × M

− → M

(*g,m*)

− → g · m

i) Ist $m \in M$ *,* $g \in G$*, so ist*

$StabG(\, g \cdot m) = \{\, g \circ h \circ g - 1 \mid h \in StabG(\, m)\, \}.$

Allgemeiner ist f¨

ur eine Teilmenge N von M

$StabG(\, g \cdot m \mid m \in N\,) = \{\, g \circ h \circ g - 1 \mid h \in StabG(\, N\,)\, \}$

ii) Sind m und m Elemente von M , so sind ihre Bahnen entweder gleich oder

disjunkt, d.h.

entweder $G \cdot m = G \cdot m$ *oder* $G \cdot m \cap G \cdot m = \emptyset$ *.*

iii) Falls G endliche Ordnung hat, so gilt f¨

ur jedes $m \in M$

|

|

G|

$G \cdot m| =$

(1.7)

$|StabG(\, m)\, |$

wobei f¨

ur eine beliebige Menge M *die Anzahl ihrer Elemente mit* | M | *bezeichnet*

wird. In Worten:

Die L¨

ange der Bahn von m ist gleich dem Quotienten aus der Gruppen-

”ordnung und der Ordnung der Stabilisatoruntergruppe von m.“

Beweis

i) Ist $h \in StabG(m)$, so ist nach den Rechenregeln für Gruppenoperationen

$(g \circ h \circ g^{-1}) \cdot (g \cdot m) = (g \circ h \circ g^{-1} \circ g) \cdot m = (g \circ h) \cdot m =$

$=$

$g \cdot (h \cdot m) = g \cdot m$,

.

also ist $g \circ h \circ g^{-1} \in StabG(g \cdot m)$. Dies zeigt, daß

$\{ g \circ h \circ g^{-1} \mid h \in StabG(m) \} \subset StabG(g \cdot m)$

(1.8)

Wendet man (1.8) an, indem man g durch g^{-1} und m durch $g \cdot m$ ersetzt, so

erhält man

$\{ g^{-1} \circ h \circ g \mid h \in StabG(g \cdot m) \} \subset StabG(m)$

Dabei wurde verwendet, daß nach (1.6) $g^{-1} \cdot (g \cdot m) = m$, und daß $(g^{-1})^{-1} = g$.

Die letzte Formel besagt, daß es für jedes $h \in StabG(g \cdot m)$ ein Element

$h \in StabG(m)$ gibt, so daß

$g^{-1} \circ h \circ g = h$

oder, was äquivalent ist

$h = g \circ h \circ g^{-1}$

Dies beweist, daß

$StabG(g \cdot m) \subset \{ g \circ h \circ g - 1 \mid h \in StabG(m) \}$

Zusammen mit (1.8) beweist dies den ersten Teil des Satzes.

ii) Seien $m,m \in M$, so daß $G \cdot m \cap G \cdot m = \emptyset$. Wir wollen zeigen, daß dann

$G \cdot m = G \cdot m$. Dazu wählen wir $m \in G \cdot m \cap G \cdot m$. Nach Definition gibt es

$g,g \in G$, so daß

$m = g \cdot m = g \cdot m$

Setze

$h := (g) - 1 \circ g$

Dann ist nach (1.6) und den Rechenregeln für Gruppenoperationen

$m = (g) - 1 \cdot m = (g) - 1 \cdot (g \cdot m) = h \cdot m$

Sei nun $n \in G \cdot m$. Nach Definition gibt es $\gamma \in G$, so daß

$n = \gamma \cdot m$

Dann ist

$n = \gamma \cdot (h \cdot m) = (\gamma \circ h) \cdot m \in G \cdot m$

Dies zeigt, daß

$G \cdot m \subset G \cdot m$

Die umgekehrte Inklusion zeigt man analog, und der Fall einer Teilmenge N

von M kann ähnlich behandelt werden.

iii) Wir betrachten die Abbildung

Φ :

G

$-\rightarrow G \cdot m$

g

$-\rightarrow g \cdot m$

.

Nach Definition ist Φ surjektiv. Das Urbild $\Phi - 1(m)$ ist nach Definition gerade $StabG(m)$. Es hat also $|StabG(m)|$ Elemente. Da G die disjunkte Vereinigung der Mengen $\Phi - 1(m)$, $m \in G \cdot m$ ist, gilt

$|G| =$

$|\Phi - 1(m)|$

$m \in G \cdot m$

Wir wollen zeigen, daß auch für jedes andere Element m der Bahn $G \cdot m$ das Urbild $\Phi - 1(m)$ genau $|StabG(m)|$ Elemente hat. Dann ist die behauptete Formel (1.7) offensichtlich.

Sei also $m \in G \cdot m$. Schreibe $m = g \cdot m$ mit $g \in G$. Wir behaupten, daß

$StabG(m)$

$-\rightarrow \Phi - 1(m)$

(1.9)

h

$-\rightarrow g \circ h$

eine bijektive Abbildung ist. Zunächst ist diese Abbildung wohldefiniert, denn

für $h \in StabG(m)$ ist

$\Phi(g \circ h) = (g \circ h) \cdot m = g \cdot (h \cdot m) = g \cdot m = m$,

also ist $g \circ h \in \Phi - 1(m)$. Die Abbildung (1.9) ist injektiv, denn ist $g \circ h = g \circ h$
,

so ist $h = (g - 1 \circ g) \circ h = g - 1 \circ (g \circ h) = g - 1 \circ (g \circ h) = h$. Schließlich ist die Abbildung (1.9) auch surjektiv, denn für $g \in \Phi - 1(m)$ gilt $g \cdot m = m = g \cdot m$,

also ist $(g - 1 \circ g) \cdot m = m$. Somit ist $h := g - 1 \circ g \in StabG(m)$ und $g = g \circ h$.

Damit ist gezeigt, daß die Abbildung (1.9) bijektiv ist. Insbesondere ist also

$|\Phi - 1(m)| = |StabG(m)|$

für alle $m \in G \cdot m$

Wie bereits erwähnt, ist damit der Satz bewiesen. ✷

Beispiele und Anwendungen

1. G sei die Symmetriegruppe eines Würfels, und M die Menge der Ecken des

Würfels. Wie oben gesagt, operiert G auf M durch

$G \times M$

$-\rightarrow M$

(ϕ, v)

$-\rightarrow \phi(v)$

Wir wollen die Formel (1.7) aus Satz 1.3 in diesem Fall nachprüfen. Sei also v

irgendeine Ecke des Würfels. Man überlegt sich leicht, daß G transitiv auf M

operiert. Deswegen ist $G \cdot v = M$ und

$|G \cdot v| = |M| = 8$

Als nächstes bestimmen wir die Stabilisatoruntergruppe $StabG(v)$ der Ecke v.

Ist $\phi \in StabG(v)$, so ist nach Satz 1.2 die Abbildung ϕ

.

v

Bild 1.32

• entweder die Identität *id*,

• oder eine Drehung um eine Achse durch v und O,

• oder eine Spiegelung an einer Ebene durch v und O,

denn die Punktspiegelung pO oder Abbildungen der Form $pO \circ \psi$ (wobei ψ eine Drehung um einen Winkel α mit $0 < \alpha < 360\circ$, $\alpha = 180\circ$ ist) haben ja keine von O verschiedenen Fixpunkte. Für eine Spiegelung in $StabG(v)$ muß die Spiegelungsebene eine der drei von v ausgehenden Kanten enthalten (vgl. Bild 1.32). Daraus ergibt sich, daß $StabG(v)$ genau drei Spiegelungen enthält. Eine Drehung in $StabG(v)$ hat notwendigerweise Drehwinkel $120\circ$ oder $240\circ$. So sieht man, daß $StabG(v)$ genau zwei Drehungen enthält. Schließlich ist natürlich *id* in $StabG(v)$ enthalten, also ist

$|StabG(v)| = 6$

Nach (1.7) ergibt sich demnach

$|G| = |G \cdot v| \cdot |StabG(v)| = 8 \cdot 6 = 48$

was mit unserem Resultat aus Abschnitt 1.1 übereinstimmt. Bemerken Sie, daß die Bestimmung von $G \cdot v$ und $StabG(v)$ viel einfacher war als die Bestimmung aller Isometrien des Würfels!

2. Wir betrachten die Operation der symmetrischen Gruppe Sn auf der Menge

$M = \{1, \ldots, n\}$

$Sn \times M$

$\longrightarrow M$

(σ, x)

$\longrightarrow \sigma(x)$

Diese Operation ist offenbar transitiv. Insbesondere ist also die Bahn des Elementes n von M gleich M. Somit ist

$|Sn \cdot n| = n$

Die Stabilisatoruntergruppe von n ist isomorph zu $Sn-1$, denn

$Sn-1 \longrightarrow StabS(n)$

n

σ

$-\rightarrow$

$x \rightarrow$

$\sigma(x)$

falls $1 \leq x \leq n-1$

n

falls $x = n$

ist ein Gruppenisomorphismus. Also ist

$|StabS(n)| = |S$

n

$n-1|$

Formel (1.7) liefert

$|Sn| = n \cdot |Sn-1|$

Mit vollständiger Induktion folgert man daraus leicht, daß

$|Sn| = n! := n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$.

(1.10)

3. Sei G eine endliche Gruppe und H eine Untergruppe von G. Wir definieren eine Operation der Gruppe H auf der Menge G durch

$H \times G -\rightarrow G$

(h,g)

$-\rightarrow h \circ g$

Für jedes $g \in G$ ist $StabH(g) = \{ h \in H \mid h \circ g = g \} = \{e\}$, denn ist $h \circ g = g$, so

ist $h = h \circ e = h \circ (g \circ g^{-1}) = (h \circ g) \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = e$. Nach Formel (1.7) haben also alle Bahnen von H in G die Länge $|H|$. Sei r die Anzahl solcher

Bahnen. Nach Satz 1.3. *ii)* sind Bahnen entweder gleich oder disjunkt, also gilt

$|G| = r|H|$. Damit haben wir bewiesen:

Satz 1.4 *Sei G eine endliche Gruppe und H eine Untergruppe von G. Dann ist die*

Ordnung $|H|$ *von H ein Teiler der Ordnung* $|G|$ *von G.*

4. Sei G eine Gruppe. Dann definiert man eine Operation der Gruppe G auf der

Menge G durch

$G \times G \longrightarrow G$

(g,h)

$\longrightarrow g \circ h \circ g^{-1}$

Diese Operation nennt man die Operation durch *Konjugation* und ihre Bahnen

die *Konjugationsklassen* in G. Zwei Elemente $h,h \in G$ nennt man *konjugiert*,

wenn es ein $g \in G$ gibt, so daß $h = g \circ h \circ g^{-1}$. Ebenso sagt man, daß

zwei Teilmengen N,N von G konjugiert sind, wenn es ein $g \in G$ gibt, so daß

$N = \{ g \circ n \circ g^{-1} \mid n \in N \}$. Teil *i*) von Satz 1.3 impliziert also:

Bemerkung 13 Sei $G \times M \rightarrow M$ eine Operation der Gruppe G auf der Menge

M. Sind m, m Elemente derselben Bahn, so sind ihre Stabilisatoruntergruppen

konjugiert.

.

1.2 Gruppen und Gruppenoperationen

Für festes $g \in G$ heißt die Abbildung

G

$\longrightarrow G$

h

$\longrightarrow g \circ h \circ g^{-1}$

die *Konjugation* mit g. Sie ist ein Gruppenhomomorphismus, denn sind h_1, $h_2 \in G$, so ist

$g \circ (h_1 \circ h_2) \circ g^{-1} = g \circ h_1 \circ e \circ h_2 \circ g^{-1}$

$=$

$g \circ h_1 \circ (g^{-1} \circ g) \circ h_2 \circ g^{-1}$

$=$

$(g \circ h_1 \circ g^{-1}) \circ (g \circ h_2 \circ g^{-1})$,

und offenbar ist $g \circ e \circ g^{-1} = e$. Dieser Gruppenhomomorphismus ist sogar ein Gruppenisomorphismus; die inverse Abbildung ist die Konjugation mit g^{-1}. Insbesondere gilt also

Lemma 14 *Konjugierte Untergruppen einer Gruppe G sind isomorph.*

In Abschnitt 1.1 haben wir vor allem die Operation der Gruppe aller Isometrien auf der Ebene (bzw. auf dem Raum) betrachtet. Definition 5 besagt, dass zwei Gebilde N, N genau dann die gleiche Symmetrie haben, wenn es $\psi \in Iso$ gibt, so daß $Iso\ \psi(N) = Iso(N)$. Da $Iso\ \psi(N) = \psi \circ Iso(N) \circ \psi^{-1}$, kann man die

Definition wie folgt umformulieren.

(1.11) Zwei Teilmengen N und N der Ebene (bzw. des Raums) haben die gleiche Symmetrie, wenn ihre Stabilisatoruntergruppen $StabIso(N)$ und $StabIso(N)$ in der Gruppe Iso aller Isometrien konjugiert sind.

5. Es sei

$G \times M$

$-\rightarrow M$

(g,m)

$-\rightarrow g \cdot m$

die Operation einer Gruppe G auf einer Menge M. Dann ist für jedes $g \in G$ die Abbildung $\phi g : M \rightarrow M, m \rightarrow g \cdot m$ eine bijektive Abbildung von M auf sich, und die inverse Abbildung ist $\phi g-1$. In der Tat, es gilt allgemeiner

$\phi g \circ \phi h = \phi g \circ h$

für alle $g,h \in G$,

(1.12)

und somit ist $\phi g \circ \phi g-1 = \phi e = id$ und $\phi g-1 \circ \phi g = \phi e = id$. (1.12) zeigt auch, daß die Abbildung

$\Phi :$

G

$-\rightarrow \sigma(M)$

g

$-\rightarrow \phi g$

von G in die Gruppe der bijektiven Abbildungen von M auf sich ein Gruppen-homomorphismus ist.

Ist umgekehrt $\Phi : G \rightarrow \sigma(M)$ ein Gruppenhomomorphismus, so ist

$G \times M$

$-\rightarrow M$

(g,m)

$-\rightarrow$

$\Phi(g)(m) =: g \cdot m$

eine Gruppenoperation, denn es gilt

$(g \circ h) \cdot m =$

$\Phi(g \circ h)(m) = \Phi(g) \circ \Phi(h)(m)$

$=$

$\Phi(g)$

$\Phi(h)$

(m)

$=$

$\Phi(g)(h \cdot m) = g \cdot (h \cdot m)$

und

$e \cdot m =$

$\Phi(e)(m) = (id)(m) = m$

Die beiden oben beschriebenen Konstruktionen sind invers zueinander. Salopp gesagt gilt also:

Die Angabe einer Operation einer Gruppe G auf einer Menge M

”ist dasselbe wie die Angabe eines Gruppenhomomorphismus von G

nach $\sigma(M)$.“

..

Ubung: Zeigen Sie, daß in einer Gruppe stets

$(g^{-1})^{-1} = g$

für alle $g \in G$!

..

Ubung: Es seien σ und τ die Permutationen

1

2

3

4

5

1

2

3

4

5

$\sigma :=$

$\tau :=$

3

4

5

1

2

5

4

3

1

2

Berechnen Sie $\sigma \circ \tau$, $\tau \circ \sigma$, $\sigma - 1$ und $\tau - 1$!

¨

Ubung: Es sei M eine nichtleere Menge und

$G \times M$

$- \rightarrow M$

(g,m)

$- \to g \cdot m$

eine Gruppenoperation. Zeigen Sie, daß die folgenden drei Aussagen äquivalent sind:

a) Es gibt $m \in M$, so daß $G \cdot m = M$.

b) Die Gruppenoperation ist transitiv.

c) $G \cdot m = M$ für alle $m \in M$!

..

Ubung: Sei $G \times M \to M$, $(g,m) \to g \cdot m$ die Operation einer Gruppe G auf einer

Menge M, und N eine endliche Teilmenge von M. Zeigen Sie:

$StabG(N) = \{ g \in G \mid g \cdot n \in N$

für alle

$n \in N \}$

..

Ubung: Bestimmen Sie die Ordnung der Symmetriegruppe eines Ikosaeders (vgl.

Bild 1.5)!

.

1.3 Endliche Symmetriegruppen

39

1.3

Endliche Symmetriegruppen

In diesem Abschnitt wollen wir *alle* möglichen Symmetriegruppen von Polygonen in

der Ebene bzw. Polyedern im Raum bestimmen.

Ein Polyeder *P* im Raum hat nur endlich viele Ecken, und eine Isometrie des

Raumes, die das Polyeder in sich überführt, ist durch die Bilder aller Ecken eindeutig

bestimmt. Deswegen ist die Symmetriegruppe *Iso*(*P*) eines Polyeders *P* im Raum

stets endlich. Ferner gibt es eine eindeutig bestimmte Kugel *K* kleinsten Radius', so

daß das Polyeder *P* ganz in *K* enthalten ist. Jede Isometrie, die *P* auf sich abbildet,

bildet dann auch *K* auf sich ab, läßt also den Mittelpunkt *O* von *K* fest. Folglich

ist *Iso*(*P*) eine endliche Untergruppe der Gruppe aller Isometrien, die den Punkt

O festlassen. Ebenso ist die Symmetriegruppe eines Polygons in der Ebene eine

endliche Untergruppe der Gruppe aller Isometrien, die den Umkreismittelpunkt des

Polygons als Fixpunkt haben. Das Problem der Bestimmung aller Symmetriegruppen

von Polygonen in der Ebene bzw. von Polyedern im Raum führt also auf die folgende

Aufgabe:

Sei *O* ein fester Punkt in der Ebene bzw. im Raum. Bestimme alle endli-

"chen Untergruppen von *StabIso*(*O*) bis auf Konjugation!"

Die Einschränkung bis auf Konjugation" rührt daher, daß wir ja sagen, daß zwei

"

Gebilde die gleiche Symmetrie haben, wenn ihre Symmetriegruppen konjugiert sind

(vgl. (1.11)!). Wir bezeichnen mit $O(2)$ bzw. $O(3)$ die Stabilisatoruntergruppen von

O in der Gruppe aller Isometrien der Ebene bzw. des Raums. Die oben gestellte

Aufgabe für die Ebene löst

Satz 1.5 *Jede endliche Untergruppe von* $O(2)$ *ist konjugiert zu einer der folgenden*

Gruppen:

i) der Gruppe C_n*, die aus den Drehungen um* O *um die Winkel* $j/n \cdot 360^\circ$, $0 \leq$

$j < n$ *besteht,*

ii) der Symmetriegruppe D_n *eines regul¨*

aren n-Ecks ($n \geq 3$) *mit Schwerpunkt* O*,*

iii) der Kleinschen Vierergruppe V_4 *, die aus der Identität id , der Drehung um*

180° *um* O*, und zwei Spiegelungen an zueinander senkrechten Achsen durch* O

besteht, oder

iv) der Gruppe W *, die aus der Identit¨*

at und der Spiegelung an einer Achse durch

O *besteht.*

Je zwei verschiedene der oben genannten Gruppen sind nicht zueinander isomorph,

mit der Ausnahme von C_2 *und* W *.*

Beweis Zunächst überzeugt man sich leicht, daß die angegebenen Mengen C_n,

D_n,

V_4 und W Untergruppen von $O(2)$ sind. Ferner gilt

$|C_n| = n$, $|D_n| = 2n$, $|V_4| = 4$, $|W| = 2$

Man verifiziert leicht, daß C_n und V_4 kommutativ sind, D_n aber nicht. Sind zwei

Gruppen isomorph, so haben beide die gleiche Ordnung, und ist eine der beiden

Gruppen kommutativ, so auch die andere. Dies zeigt schon, daß die Gruppen C_n,

D_n, V_4, W paarweise nicht isomorph sind, mit der einzig möglichen Ausnahme von

C_4 und V_4 einerseits und C_2 und W andererseits. C_2 und W sind trivialerweise isomorph. In V_4 gilt $g^2 = id$ für jedes $g \in V_4$, in C_4 gilt dies aber nicht für die

Drehung um 90°. Somit sind auch C_4 und V_4 nicht zueinander isomorph.

Die Hauptaussage des Satzes ist, daß jede endliche Untergruppe von $O(2)$ zu einer

der angegebenen Gruppen konjugiert ist. Sei also G eine endliche Untergruppe von

$O(2)$. Falls $G = \{id\}$, so ist $G = C_1$, und es ist nichts zu zeigen. Wir können von nun an annehmen, daß $|G| \geq 2$. Nach Satz 1.1 ist jedes Element von $G \setminus \{id\}$ eine

Drehung um O oder eine Spiegelung an einer Achse durch O. Wir unterscheiden

zwei Fälle:

1. Fall : $G \setminus \{id\}$ besteht nur aus Drehungen um O.

Sei α der kleinste in G auftretende Drehwinkel zwischen $0\circ$ und $360\circ$, und $r\alpha$ die

Drehung um α. Für jede natürliche Zahl j ist $(r\alpha)j = rj\alpha$. Da G endlich ist, gibt es natürliche Zahlen $j_1 > j_2 > 0$, so daß $(r\alpha)j_1 = (r\alpha)j_2$. Dann ist $(r\alpha)j_1 - j_2 = id$. Dies zeigt, daß die Menge

$$\{ j \in \mathbb{N} \mid (r\alpha)j = id \}$$

nicht leer ist. Sei n das Minimum dieser Menge. Dann ist insbesondere $(r\alpha)n = id$,

also gibt es eine natürliche Zahl m, so daß

$$n \cdot \alpha = m \cdot 360\circ$$

Als nächstes zeigen wir, daß $m = 1$. Wäre $m > 1$, so gäbe es $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $1 < n_1 < n$, so daß

$$n_1 \cdot \alpha > 360\circ$$

und

$$(n_1 - 1) \cdot \alpha < 360\circ$$

Dann wäre $(r\alpha)n_1$ die Drehung um den Winkel $n_1 \cdot \alpha - 360\circ$ und $0 < n_1 \cdot \alpha - 360\circ < n_1 \cdot \alpha - (n_1 - 1) \cdot \alpha < \alpha$.

Somit enthielte G eine Drehung um einen Winkel, der positiv und strikt kleiner als

α ist, nämlich $(r\alpha)n_1$. Dies stünde im Widerspruch zu unserer Wahl von α. Also ist

$$\alpha = \frac{1}{n} \cdot 360\circ$$

Insbesondere ist deshalb $Cn \subset G$. Wir behaupten, daß $Cn = G$. Falls das nicht

der Fall wäre, enthielte G eine Drehung r um einen Winkel β mit $0 < \beta < 360 \circ$,

$\beta /$

$\in \{ j \cdot \alpha \mid 0 < j < n - 1 \}$. Dann gäbe es eine eindeutig bestimmte natürliche Zahl

$j\ 0$, so daß

$j\ 0\ \alpha < \beta < (\ j\ 0 + 1)\ \alpha$

G enthielte dann aber auch die Drehung $r \circ (\ r\alpha)\ -j\ 0$ um den Winkel $\beta - j\ 0\ \alpha$, der positiv und strikt kleiner als α ist. Wieder ergäbe sich ein Widerspruch zur Wahl

von α.

Damit ist gezeigt, daß jede endliche Untergruppe von $O(2)$, die nur aus der Iden-

tität und Drehungen besteht, gleich einer der Gruppen Cn ist.

.

1.3 Endliche Symmetriegruppen

41

2. Fall : G enthält eine Spiegelung s an einer Geraden g durch O.

Sei H die Menge aller Drehungen in G (einschließlich der Identität). Da die Hinter-

einanderschaltung zweier Drehungen wieder eine Drehung oder die Identität ist, ist

H eine Untergruppe von G. Nach Fall 1 ist also

$H = Cn$

für ein $n \geq 1$

Sind s 1 und s 2 Spiegelungen an den Achsen g 1 bzw. g 2 durch O, und bilden g 1 und g 2 einen Winkel α mit $0 < \alpha < 180 \circ$, so ist s 2 $\circ$ s 1 die Drehung um den Winkel 2 α

(vgl. Bild 1.33). In der Tat, es gibt keinen von O verschiedenen Punkt X, so daß

s (s (X))

2

1

g2

α

X

α

g1

O

s (X)

1

(s o s) (g)

2

1

1

Bild 1.33

s

− 1

1(X) = s 2(X) . Da s 2 = s 2

, hat s 2 ◦ s 1 keinen von O verschiedenen Fixpunkt.

Nach Satz 1.1 ist also s 2 ◦ s 1 eine Drehung. Um den Drehwinkel zu bestimmen,

betrachte man das Bild der Achse g 1 . Sie wird von s 1 festgelassen, und von s 2 auf

eine Gerade durch O abgebildet, die mit g 1 den Winkel 2 α bildet.

Sind insbesondere s 1 ,s 2 ∈ G, so ist s 2 ◦ s 1 ∈ $H = Cn$, also ist 2 α ein Vielfaches von 1 / n · 360 ◦. Dies zeigt, daß der Winkel der Achse einer jeden Spiegelung in G mit

der Achse g ein Vielfaches von 1 / n · 180 ◦ ist.

Andererseits ist für jedes j ∈ N die Hintereinanderschaltung r j / n · 360 ◦ ◦ s der Dre-

hung r j / n · 360 ◦ um j / n · 360 ◦ und der Spiegelung s eine Spiegelung an der Achse, die mit g den Winkel j / n · 180 ◦ bildet.

..

Ubung: Zeigen Sie: Ist $r\alpha$ die Drehung um den Winkel α um O und s die Spiegelung

an der Achse g durch O, so ist $r\alpha$ ◦ s die Spiegelung an der Achse g durch O, die

mit g den Winkel 1 / 2 α bildet!

Die vorhergehenden Überlegungen zeigen, daß G aus den Elementen von $H = Cn$

und den Spiegelungen an Geraden durch O besteht, die mit g einen Winkel von

j / n · 180 ◦, 0 ≤ j < n einschließen. Zeichne nun einen Kreis K um O und wähle einen Durchstoßpunkt von g mit K (vgl. Bild 1.34). Von P ausgehend nehmen wir jeden

zweiten Punkt von *K*, der auf einer Spiegelungsachse eines Elementes von *G* liegt.

Die entstehende Menge bezeichnen wir mit *M*. Für $n \geq 3$ ist *M* die Menge der Ecken

eines regulären *n*-Ecks, dessen Symmetriegruppe *G* ist. Da je zwei reguläre *n*-Ecke

die gleiche Symmetrie haben, ist *G* zu *Dn* konjugiert. Im Fall $n = 2$ besteht *G* aus

.

K

(n=5)

P

g

g

P

O

K

(n=6)

P

g

g

P

O

Bild 1.34

der Drehung um 180 ◦, der Spiegelung s und der Spiegelung an einer zu g senkrechten

Geraden. Also ist G konjugiert zu V 4 . Falls $n = 1$ ist, besteht G nur aus id und s.

Da je zwei Spiegelungen konjugiert sind, ist G zu W konjugiert.

Damit ist Satz 1.5 bewiesen.

✷

Nach Lemma 14 sind konjugierte Untergruppen isomorph, also zeigt Satz 1.5, daß

die aufgelisteten Untergruppen von $O(2)$ alle nicht konjugiert sind, mit der einzig

möglichen Ausnahme von W und C 2 . Diese Untergruppen sind aber auch nicht kon-

jugiert, denn sonst wäre eine Spiegelung s (das einzige von id verschiedene Element

von W) zu der Drehung um 180 ◦ (dem einzigen von id verschiedenen Element von

C 2) konjugiert. Ist jedoch $\phi \in Iso$, so ist $\phi \circ s \circ \phi^{-1}$ die Spiegelung am Bild der

Spiegelungsachse von s unter ϕ, also keinesfalls eine Drehung um 180 ◦.

.

.

.

1.3 Endliche Symmetriegruppen

Ein wichtiges Hilfsmittel im Beweis von Satz 1.5 war die (triviale) Tatsache, daß

die Hintereinanderschaltung zweier Drehungen um O wieder eine Drehung um O ist.

Eine ähnliche Aussage gilt auch im Raum.

Satz 1.6 *Sei O ein Punkt im Raum, und seien ϕ 1 und ϕ 2 Drehungen um Achsen*

durch O. Dann ist die Hintereinanderschaltung ϕ 2 $\circ$ ϕ 1 wieder eine Drehung um eine

Achse durch O oder die Identit¨

at.

Da die Inverse einer Drehung wieder eine Drehung ist, besagt Satz 1.6, daß die

Teilmenge von $O(3)$, die aus der Identität und allen Drehungen um Achsen durch

O besteht, eine Untergruppe von $O(3)$ ist. Diese Untergruppe bezeichnet man mit

$SO(3)$.

Eine Strategie zum Beweis von Satz 1.6 wäre folgende: Nach Satz 1.2 ist jedes

Element von $O(3)$, das nicht in $SO(3)$ liegt, eine Spiegelung, die Punktspiegelung

an O, oder die Hintereinanderschaltung einer Drehung und der Punktspiegelung an

O. Diese Abbildungen kehren alle die Orientierung“ des Raumes um, während die

”

Elemente von $SO(3)$ die Orientierung“ erhalten. Also ist

”

$SO(3) = \{ \phi \in O(3) \mid \phi$ erhält die Orientierung‘ im Raum“ $\}$

”

,

Da mit zwei Abbildungen ϕ 1 und ϕ 2 , die die Orientierung“ erhalten, auch die

”

Hintereinanderschaltung ϕ 1 $\circ$ ϕ 2 die Orientierung“ erhält, folgt, daß $SO(3)$ eine

”

Untergruppe von $O(3)$ ist.

Wir wollen jedoch den Begriff der Orientierung“ nicht benutzen und geben einen

”

anderen, konstruktiveren Beweis.

Beweis von Satz 1.6 Der Fall, daß die Drehachsen g 1 von ϕ 1 und g 2 von ϕ 2 über-

einstimmen, ist trivial. Wir betrachten also den Fall, daß die Drehachsen verschieden

sind. Mit α 1 bzw. α 2 bezeichnen wir den Drehwinkel von ϕ 1 bzw. ϕ 2 . Es sei E die Ebene durch g 1 und g 2 . Ferner sei E 1 die Ebene durch g 1, die mit E den Winkel 1 α

α

2

1 bildet, und E 2 die Ebene durch g 2, so daß E mit E 2 den Winkel 1

2

2 bildet.

Mit s bzw. s 1 bzw. s 2 bezeichnen wir die Spiegelung an E bzw. E 1 bzw. E 2. Wie in Fall 2 des Beweises von Satz 1.5 sieht man, daß

ϕ 1 = $s \circ s$ 1

und

ϕ 2 = s 2 $\circ$ s.

Dann ist

ϕ 2 $\circ$ ϕ 1 = (s 2 $\circ$ s) $\circ$ ($s \circ s$ 1) = s 2 $\circ$ ($s \circ s$) $\circ$ s 1 = s 2 $\circ$ id $\circ$ s 1 = s 2 $\circ$ s 1

Wie oben sieht man, daß s 2 $\circ$ s 1 eine Drehung an der Schnittgeraden von E 1 und

E 2 ist.

✷

Am Anfang von Kapitel 6 geben wir einen anderen Beweis von Satz 1.6.

Der wesentliche Schritt bei der Untersuchung der endlichen Untergruppen von

O(3) ist die Klassifikation aller endlichen Untergruppen von SO(3) , also der endli-

chen Drehgruppen“. Wir geben zunächst fünf Typen solcher endlicher Drehgruppen

”

an, und werden danach zeigen, daß dies bis auf Konjugation alle möglichen Typen

sind.

(1.13.1) Sei g eine Gerade durch O und $n \geq 1$. Mit C n bezeichnen wir die Gruppe

aller Drehungen um g mit Winkeln $j / n \cdot 360 \circ$, $0 \leq j \leq n - 1$. C n ist offensichtlich isomorph zu der Gruppe Cn aus Satz 1.5. Insbesondere ist $|C\ n| = n$. Die

Gruppe C n heißt auch die *zyklische Gruppe* der Ordnung n.

(1.13.2) Sei E eine Ebene durch O, und Pn ein reguläres n-Eck ($n \geq 3$) in E (vgl.

Bild 1.35). Die Stabilisatoruntergruppe von Pn in $SO(3)$ bezeichnen wir mit

D n.

Bild 1.35

g

Pn

O

E

Wir wollen ihre Elemente aufzählen:

Falls eine Drehung ϕ das n-Eck auf sich abbildet, so führt sie die Ebene E

in sich über. Folglich ist ihre Drehachse entweder die Gerade g senkrecht zu

E durch O, oder aber ihre Drehachse liegt in E und der Drehwinkel ist $180 \circ$.

Im ersten Fall ist ϕ notwendigerweise eine Drehung um einen Winkel $j / n \cdot 360 \circ$

mit $0 \leq j \leq n - 1$; und all diese Drehungen liegen auch in D n. Im zweiten

Fall ist die Einschränkung von ϕ auf E die Spiegelung an der Drehachse g

von ϕ. Folglich ist g eine der n Symmetrieachsen von Pn. Umgekehrt führt

die Drehung um 180 ◦ an einer der Symmetrieachsen von Pn das n-Eck in sich über, liegt also in D n.

Wir sehen, daß die Abbildung D $n \to Dn$ von D n in die in Satz 1.5 betrachtete Untergruppe von $O(2)$, die jedem $\phi \in$ D n die Einschränkung von ϕ auf die Ebene E zuordnet, ein Isomorphismus ist.

.

1.3 Endliche Symmetriegruppen

Für $n = 2$ bezeichnen wir mit D2 die Gruppe, die aus der Identität, den Drehungen um 180 ◦ an zwei zueinander senkrechten Geraden in E, und der Drehung um 180 ◦ an der zu E senkrechten Geraden g besteht. Wie oben sieht man, daß D2 zu der Gruppe V 4 isomorph ist.

Die Gruppe D n heißt die *Diedergruppe* der Ordnung 2 n.

(1.13.3) Mit T bezeichnen wir die Stabilisatoruntergruppe eines regulären Tetraeders

mit Mittelpunkt O in $SO(3)$. Man überlegt sich leicht, daß T transitiv auf der

Bild 1.36 Tetraeder

Menge der Ecken des Tetraeders operiert, und daß die Stabilisatoruntergruppe einer Ecke des Tetraeders aus der Identität und den Drehungen um die Gerade durch O und diese Ecke mit den Winkeln 120 ◦ und 240 ◦ besteht. Die Formel (1.7) aus Satz 1.3 liefert somit

$| T | = 3 \cdot$ (Anzahl der Ecken) $= 3 \cdot 4 = 12$

T heißt die *Tetraedergruppe*.

(1.13.4) Sei O die Stabilisatoruntergruppe eines Würfels mit Mittelpunkt O in $SO(3)$.

Bild 1.37 Würfel

Wie wir in Beispiel 1 nach Satz 1.3 gesehen haben, ist

$|O| = 24$

O nennt man im allgemeinen die *Oktaedergruppe*; wir haben ja schon erwähnt, daß Oktaeder und Würfel die gleiche Symmetrie haben (vgl. Seite 20).

(1.13.5) Sei I die Stabilisatoruntergruppe eines Ikosaeders mit Mittelpunkt O in $SO(3)$. Wir nehmen hier an, daß wir bereits wissen, daß es Ikosaeder gibt, und

Bild 1.38 Ikosaeder

daß wir ihre wichtigsten Eigenschaften kennen. Das Ikosaeder hat 12 Ecken, 30 Kanten und 20 Seitenflächen (welche eichseitige Dreiecke sind). Die Gruppe I besteht neben der Identität aus

• Drehungen um Achsen durch die Mittelpunkte von zwei gegenüberliegenden Seitenflächen mit Winkel 120° und 240°,

• Drehungen um Achsen durch zwei gegenüberliegende Kantenmittelpunkte um den Winkel 180°,

• Drehungen um Achsen durch zwei gegenüberliegende Ecken um Winkel

von 72 ◦, 144 ◦, 216 ◦, oder 288 ◦.

Wie oben kann man ausrechnen, daß

$| I | = 60$

Die Gruppe I heißt *Ikosaedergruppe*. Man kann zeigen, daß die Mittelpunkte

der Seitenflächen des Ikosaeders ein Dodekaeder bilden, und umgekehrt. Dies

zeigt dann, daß I auch die Symmetriegruppe eines Dodekaeders ist.

Die in (1.13.1)–(1.13.5) angegebenen Gruppen sind paarweise nicht isomorph. Für

die Gruppen C_n und D_n haben wir dies bereits in Satz 1.5 verifiziert. Da isomorphe

Gruppen die gleiche Ordnung haben, bleibt noch zu zeigen, daß

T nicht zu C_{12} oder D_6 isomorph ist,

.

.

.

.

.

.

O nicht zu C_{24} oder D_{12} isomorph ist,

I nicht zu C_{60} oder D_{30} isomorph ist.

..

Ubung: Zeigen Sie, daß die Gruppen T , O , I nicht kommutativ sind!

Da die Gruppen C n alle kommutativ sind, T , O und I aber nicht, tritt jeweils die erste

der beiden Möglichkeiten nicht auf. Um jeweils die zweite Alternative auszuschließen,

führen wir noch einen abstrakten Begriff ein:

Definition 15 *Sei G eine Gruppe, $g \in G$. Dann heißt die kleinste natürliche Zahl*

n, so daß

$gn = e$,

aber $gj = e$

f¨

ur $0 < j < n$

die Ordnung *von g in G. Falls es kein* $j \in \mathrm{N}$ *gibt, so daß* $gj = e$, *so sagt man, g*

habe unendliche Ordnung.

Ist $\Phi : G \to G$ ein Gruppenisomorphismus, so haben für jedes $g \in G$ die Elemente

g in G und $\Phi(g)$ in G die gleiche Ordnung. Zwei Gruppen sind insbesondere dann

nicht isomorph, wenn es ein $n \in \mathrm{N}$ gibt, so daß G Elemente der Ordnung n enthält,

G aber nicht.

Nun kennen wir alle Elemente von T , O und I . Es zeigt sich, daß

T nur Elemente der Ordnung 1 , 2 , 3 enthält,

O nur Elemente der Ordnung 1 , 2 , 3 , 4 , und

I nur Elemente der Ordnung 1 , 2 , 3 , 5 .

Andererseits enthält D *n* eine Drehung um den Winkel 1 / n · 360 ◦, also ein Element

der Ordnung *n.* Dies zeigt, daß T nicht zu D6 , O nicht zu D12 und I nicht zu D30

isomorph ist.

Satz 1.7 *Jede endliche Untergruppe von SO*(3) *ist in SO*(3) *konjugiert zu einer der*

Gruppen C *n, n* ≥ 1 , D *n, n* ≥ 2 , T , O *oder* I .

Beweis Sei *G* eine endliche Untergruppe von *SO*(3) . Falls *G* = *{id}*, ist *G* = C1 , und wir sind fertig. Wir können also annehmen, daß |*G*| ≥ 2 . Jedes von *id* verschiedene

Element von *G* ist eine Drehung um eine Achse, hat also genau zwei Fixpunkte auf

der Sphäre *S* 2 . Deshalb ist die Menge

M := { *X* ∈ *S* 2 | *X* ist Fixpunkt eines von *id*

verschiedenen Elementes von *G* }

endlich. Nach Definition von *M* liegt ein Punkt *X* ∈ *S* 2 genau dann in *M*, wenn

StabG(*X*) = *{id}*. Ist *X* ∈ *M* und *ϕ* ∈ *G*, so ist nach Satz 1.3. *i*

StabG ϕ(*X*) = *ϕ* ◦ *StabG*(*X*) ◦ *ϕ*− 1

.

also ist auch *ϕ*(*X*) ∈ *M*. Deswegen definiert

$G \times M$

$-\rightarrow M$

(ϕ, X)

$-\rightarrow \phi(X)$

eine Operation von G auf M. Seien $M_1, \ldots, M_r$ die Bahnen von G auf M. Nach Satz 1.3. *ii* ist M die disjunkte Vereinigung von $M_1, \ldots, M_r$. Für je zwei Punkte einer

Bahn M_i hat nach Satz 1.3. *i* die Stabilisatoruntergruppe in G die gleiche Ordnung;

wir bezeichnen diese Ordnung mit n_i. Da die Stabilisatoruntergruppen von Punkten

in M alle ungleich $\{id\}$ sind, gilt

$n_i \geq 2$

für $i = 1, \ldots, r$

Wir unterbrechen kurz den Beweis, um die durchgeführten Konstruktionen am

Beispiel $G = O$ (der Symmetriegruppe des Würfels) zu illustrieren. M ist die Menge der

Durchstoßpunkte von Drehachsen von Elementen von O mit S^2, also die Menge der Ek-

ken, Kanten und Seitenmittelpunkte der Figur, die durch Projektion des Würfels von O

aus auf S^2 entsteht (siehe Bild 1.39). Es gibt drei Bahnen, nämlich die Menge M_1 der

Kantenmittelpunkte, die Menge M_2 der Ecken, und die Menge M_3 der Seitenflächen. In

diesem Fall ist $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, $n_3 = 4$. 2cm

Bild 1.39

Wir fahren nun mit dem Beweis fort. Sei

$$M := \{ (\phi, X) \in G \backslash \{id\} \times M \mid \phi(X) = X \}$$

die Menge aller Paare (ϕ, X) mit $\phi \in G$, $\phi = id$ und $X \in M$, für die X ein Fixpunkt

von ϕ ist. Da jedes Element von $G \backslash \{id\}$ eine Drehung ist, also genau zwei Fixpunkte

auf S^2 hat, gilt

$$|M| = 2(|G| - 1)$$

(1.14)

Andererseits gibt es für jedes $X \in M_i$ genau $(n_i - 1)$ Elemente von $G \backslash \{id\}$, die X

als Fixpunkt haben — dies war ja die Definition von n_i. Folglich ist

$$|M| = (n_1 - 1) \cdot |M_1| + (n_2 - 1) \cdot |M_2| + \cdots + (n_r - 1) \cdot |M_r|$$

.

.

.

Nach Formel (1.7) aus Satz 1.3 ist

|

1

Mi| =

|G|

ni

also ist

| M | = 1 − 1

· |G| + 1 − 1

· |G| + · · · + 1 − 1

· |G|

n 1

n 2

nr

Zusammen mit (1.14) ergibt dies

2 (|G| − 1) = 1 − 1

· |G| + 1 − 1

$\cdot |G| + \cdots + 1 - 1$

$\cdot |G|$

n 1

n 2

nr

oder nach Division beider Seiten durch $|G|$ und Umordnen

1

1

1

2

+

$+ \cdots +$

$= r - 2 +$

(1.15)

n 1

n 2

nr

$|G|$

Da $ni \geq 2$ für $i = 1, \ldots, r$, ist die linke Seite von (1.15) höchstens gleich r / 2 .
Aus (1.15) folgt also

r

2

$\geq r - 2 +$

2

$|G|$

also insbesondere

$r < 2$

2

das heißt

$r \leq 3$

(1.16)

Wir diskutieren nun die Fälle $r = 1$, $r = 2$ und $r = 3$ getrennt:

Fall **r** = **1**:

Formel (1.15) liefert

1

2

=

− 1

n 1

$|G|$

Da $|G| \geq 2$, folgt 2

|

≤ 0 . Das ist unmöglich.

$G| - 1 \leq 0$ oder $1/ n$ 1

Fall **r** = **2**:

Formel (1.15) liefert

1

1

2

+

=

n 1

n 2

$|G|$

Da $|Mi| = 1 /n \cdot |G|$ folgt

i

$|M$ 1 $| + |M$ 2 $| = 2$

also ist

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

$|M_1| = |M_2| = 1$

und

$n_1 = n_2 = |G|$

Wir bezeichnen den Punkt von M 1 mit P 1, und den Punkt von M 2 mit P 2; mit

anderen Worten M 1 = $\{P$ 1 $\}$, M 2 = $\{P$ 2 $\}$. Die Stabilisatoruntergruppe $StabG$(P 1) von P 1 in G hat die Ordnung n 1 = $|G|$, also ist $G = StabG$(P 1) . Die Gruppe G

besteht also nur aus Drehungen um die Gerade g durch O und P 1 . Dasselbe gilt für

P 2 , also ist P 2 der von P 1 verschiedene Durchstoßpunkt von g mit S 2 . Sei E die Ebene senkrecht zu g. Dann bildet jedes Element ϕ von G die Ebene E in sich ab

und induziert eine Drehung in E um O. Aus Satz 1.5 folgt, daß alle Drehwinkel dieser

Drehungen Vielfache eines Winkels 1 / n · 360 ◦ mit geeignetem n sind, und daß alle

Vielfachen vorkommen. Es folgt, daß G die Menge aller Drehungen um die Achse g

mit Winkel j / n · 360 ◦, $0 \leq j \leq n - 1$ ist. Man sieht nun leicht, daß G zu C n konjugiert ist.

Fall **r** = 3:

Formel (1.15) liefert in diesem Fall

1

1

1

2

+

+

= 1 +

n 1

n 2

n 3

$|G|$

(1.17)

Insbesondere ist

1

1

1

+

+

> 1

(1.18)

n 1

n 2

n 3

Ferner ist per Definition

$n_i \geq 2$

für $i = 1, 2, 3$

(1.19)

Die Ungleichungen (1.18) und (1.19) haben — bis auf Vertauschen von n_1, n_2, n_3

— nur die in Tabelle 1.3 eingetragenen ganzzahligen Lösungen:

Tabelle 1.3

n_1	n_2	n_3	$\lvert G \rvert$
2	2	n	$2n$
(n beliebig)	2	3	3
3	3	12	2
3			

4

24

2

3

5

60

In der letzten Spalte haben wir den aus (1.17) berechneten Wert von $|G|$ eingetragen.

..

Ubung: Beweisen Sie, daß die Ungleichungen (1.18), (1.19) nur die in Tabelle 1.3

genannten ganzzahligen Lösungen haben!

.

.

.

1.3 Endliche Symmetriegruppen

51

Im Prinzip müssen wir nun die vier Fälle getrennt diskutieren und zeigen, daß im Fall

$(n_1, n_2, n_3) = (2, 2, n)$ die Gruppe G zu D_n konjugiert ist, daß im Fall $(n_1, n_2, n_3) =$

$(2, 3, 3)$ die Gruppe G zu T konjugiert ist, daß im Fall $(n_1, n_2, n_3) = (2, 3, 4)$ die Gruppe G zu O konjugiert ist und daß im Fall $(n_1, n_2, n_3) = (2, 3, 5)$ die Gruppe G zu I konjugiert ist. Alle diese Argumente sind ähnlich (siehe z.B. [Armstrong] ch. 19),

und deshalb betrachten wir nur den Fall $(n_1, n_2, n_3) = (2, 3, 4)$. (Für

Beweise, in denen man diese vier Fälle nicht zu unterscheiden braucht, siehe z.B. [Coxeter 1973]

ch. III oder [Tóth, L.] I.2)

Im Fall (n_1 ,n_2 ,n_3) = (2 , 3 , 4) besteht die Menge M_3 aus G/n = 6 Punkten. Die 3

Standgruppe jedes Punktes $P \in M_3$ hat die Ordnung 4, besteht also aus den Dre-

hungen um die Achse OP mit Winkeln 90 ◦, 180 ◦, 270 ◦ und der Identität. Wir wählen

nun einen Punkt $Q_1 \in M_3$, der nicht auf der Geraden OP liegt. Q_2 , Q_3 , Q_4 , seien die Bilder von Q_1 unter den Drehungen um die Achse OP um den Winkel 90 ◦, 180 ◦,

270 ◦. Sie liegen offenbar in der Bahn M_3 von Q_1 . Neben P, Q_1 , Q_2 , Q_3 , Q_4 hat M_3 noch einen sechsten Punkt, den wir P nennen wollen. Da Q_1 , Q_2 , Q_3 , Q_4 eine Bahn unter der Operation von $StabG(P)$ bilden, wird P von allen Elementen von

$StabG(P)$ festgelassen, ist also der zu P antipodale Punkt.

P

Q4

Q3

Q

Q

1

2

O

P’

Bild 1.40

Die Punkte Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 haben alle den gleichen Abstand von P, liegen also

in einer Ebene E senkrecht zur Achse OP (siehe Bild 1.40). Nach Konstruktion

bilden Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 ein Quadrat, dessen Mittelpunkt der Durchstoßpunkt R der

Achse OP durch E ist. Wir behaupten nun, daß E durch O geht, d.h., daß E die

Äquatorialebene“ zwischen P und P ist. Dazu bemerken wir, daß die Drehung ϕ

”

um die Achse OQ_1 um den Winkel 180° in G liegt, also jeden Punkt der Bahn M_3

wieder in einen Punkt von $M_3 = \{ P, P, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 \}$ abbildet. Wäre E nicht die Äquatorialebene, so wäre $\phi(E)$ eine von E verschiedene Ebene, die E längs der

Geraden durch Q_1 in E träfe, die senkrecht auf OQ_1 stünde. Diese Gerade enthielte

E

P

OQ1

Q4

Q3

R

Q

Q

1

2

O

S2

P’

Bild 1.41

keine der Punkte Q_2, Q_3, Q_4. Da $\phi(Q_1) = Q_1$, ϕ bijektiv ist und $\phi(Q_j) \in \phi(E)$ für $j = 1, 2, 3$, gälte

$\phi(Q_j) \in M_3 \setminus \{Q_1, Q_2, Q_3, Q_4\} = \{P, P\}$ für $j = 2, 3, 4$

Die drei Punkte Q_2, Q_3, Q_4 würden also auf die zwei Punkte P, P abgebildet. Dies

stünde im Widerspruch zur Injektivität von ϕ.

E ist also die Ebene senkrecht zu OP durch O. Damit sehen wir, daß die Punkte

P, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, P ein reguläres Oktaeder bilden (vgl. Bild 1.42). Nach Konstruk-

tion bilden alle Elemente von G dieses Oktaeder auf sich ab. Die Symmetriegruppe

P

Q

Q

4

1

O

Q3

Q2

P’

Bild 1.42

des Oktaeders ist dieselbe wie die Symmetriegruppe des Würfels, dessen Ecken die

Seitenmittelpunkte des Oktaeders sind (vgl. Bild 1.23, Seite 20). Sie enthält genau

24 Elemente in $SO(3)$. Da $|G| = 24$, ist G gleich der Stabilisatoruntergruppe dieses

.

Würfels in $SO(3)$. Weil nun je zwei Würfel die gleiche Symmetrie haben, folgt, daß

G zu O konjugiert ist.

✷

Satz 1.7 gibt einen Überblick über alle endlichen Untergruppen von $SO(3)$. Wir

können ihn verwenden, um alle endlichen Untergruppen von $O(3)$ bis auf Konjuga-

tion zu klassifizieren. Natürlich sind alle endlichen Untergruppen von $SO(3)$

auch

endliche Untergruppen von $O(3)$. Zusätzlich gibt es noch folgende Gruppen:

(1.20.1) Sei g eine Gerade durch O, $n \geq 1$, und E 1 , . . . ,En Ebenen durch g, von denen zwei aufeinanderfolgende einen Winkel von 1 / n · 180 ◦ einschließen (vgl.

Bild 1.43). Wir bezeichnen mit C n die Menge aller Isometrien, die aus den

g

1/ .

n

180o

E

E

1

2 E3

Bild 1.43

Spiegelungen an den Ebenen Ei, $1 \leq i \leq n$ und den Drehungen um die Achse

g mit den Winkeln j / n · 360 ◦, $0 \leq j \leq n - 1$, besteht. Man prüft leicht nach,

daß C n eine Untergruppe von $O(3)$ der Ordnung 2 n ist und daß

C $n \cap SO(3)$ = C n

(1.20.2) Für $n \geq 3$ sei Pn ein reguläres n-Eck mit Mittelpunkt O in einer Ebene

durch O, und D n sei seine Standgruppe in $SO(3)$. Ist n gerade, so ist die

Punktspiegelung pO an O ebenfalls eine Symmetrie von Pn. Jede Symmetrie

ψ des Polygons Pn im Raum, die nicht schon in D n liegt, läßt sich in der Form

$\psi = pO \circ \phi$

mit $\phi \in$ D n

schreiben, denn $\psi = (pO \circ pO) \circ \psi = pO \circ (pO \circ \psi)$, und $pO \circ \psi$ ist ein Element von $SO(3)$, das Pn in sich überführt. Für gerades n ist die volle Symmetriegruppe

des Polygons Pn im Raum also gleich

D $*$:= D

n

$n \cup \{ pO \circ \phi \mid \phi \in$ D $n \}$ = D $n \cup (pO \circ$ D $n)$

Man beachte, daß diese Definition für jedes $n \geq 2$ eine endliche Untergruppe

von $O(3)$ liefert, denn sind ϕ 1 ,ϕ 2 $\in$ D n, so ist

.

.

.

.

ϕ 1 $\circ$ ϕ 2 $\in$ D n, da D n eine Gruppe ist,

$(pO \circ \phi$ 1) $\circ$ ϕ 2 = $pO \circ (\phi$ 1 $\circ$ ϕ 2) $\in pO \circ$ D n,

ϕ 1 $\circ (pO \circ \phi$ 2) = $pO \circ (pO \circ \phi$ 1 $\circ pO) \circ \phi$ 2 = $pO \circ \phi$ 1 $\circ$ ϕ 2 $\in pO \circ$ D n nach (1.3), und

$(pO \circ \phi$ 1) $\circ (pO \circ \phi$ 2) = ϕ 1 $\circ$ ϕ 2 $\in$ D n nach (1.3).

Falls n ungerade ist, ist D $*$ nicht mehr die Symmetriegruppe von P

n

n, denn pO

führt ja Pn nicht in sich über.

..

Ubung: Finden Sie für ungerades $n \geq 3$ eine Figur, deren Symmetriegruppe

D $*$ ist!

n

Um die Symmetriegruppe von Pn in dem Fall zu bestimmen, daß n ungerade

ist, fassen wir Pn als Teilmenge eines regulären 2 n-Ecks P 2 n auf (vgl. Bild 1.44).

P 2n

O

P n

Bild 1.44 (n = 3)

Die Symmetriegruppe von Pn ist in diesem Fall

D := D

n

$n \cup \{ pO \circ \phi \mid \phi \in$ D2 n aber ϕ /

$\in$ D n }

Wieder ergibt diese Definition für jedes $n \geq 2$ eine endliche Untergruppe von

$O(3)$.

..

Ubung: Finden Sie für gerades $n \geq 4$ eine Figur, deren Symmetriegruppe D n ist!

(1.20.3) T sei die Standgruppe eines regulären Tetraeders mit Mittelpunkt O in $O(3)$. Dann ist

$\mathrm{T} \cap SO(3) = \mathrm{T}$

Ferner enthält T alle Spiegelungen an Ebenen durch eine Kante des Tetraeders und den Mittelpunkt der gegenüberliegenden Kante (vgl. Bild 1.45).

Sei s eine solche Spiegelung. Ist nun $\phi \in \mathrm{T}$ ein Element, das nicht in T liegt, so können wir nach Satz 1.2 schreiben

.

Bild 1.45

$\phi = pO \circ \psi$

mit $\psi \in SO(3)$

Dann ist

$\phi := s \circ \phi = (s \circ pO) \circ \psi$

in T . Da $s \circ pO$ die Drehung um 180 ◦ um die Achse durch O senkrecht zu E ist, ist $\phi = (s \circ pO) \circ \psi$ als Produkt von Elementen von $SO(3)$ wieder in $SO(3)$, das heißt, $\phi \in \mathrm{T}$. Offenbar ist $\phi = s \circ \phi$. Wir sehen damit, daß

$T = T \cup \{ s \circ \phi \mid \phi \in T \}$

(1.20.4) Mit $O*$ bezeichnen wir die Standgruppe eines Würfels mit Mittelpunkt O

in $O(3)$. Offenbar liegt pO in $O*$, und wie oben sieht man, daß

$O* = O \cup \{ pO \circ \phi \mid \phi \in O \} = O \cup (pO \circ O)$

(1.20.5) $I*$ sei die Standgruppe eines Ikosaeders mit Mittelpunkt O in $O(3)$. Es gilt

$I* = I \cup (pO \circ I)$

Neben diesen naheliegenden Gruppen gibt es noch weitere endliche Untergrup-

pen von $O(3)$:

(1.20.6) Wir betrachten einen Würfel mit Mittelpunkt O, dessen Symmetriegruppe

$O*$ ist. Auf jeder Seitenfläche des Würfels markieren wir eine Strecke, die zu

zwei Kanten der Seitenfläche parallel ist und in der Mitte zwischen den beiden

Kanten verläuft, so daß die Figur in Bild 1.46 entsteht.

Sei $T*$ die Untergruppe aller derjenigen Elemente von $O*$, die Markierungs-

streifen in Markierungsstreifen überführen. $T*$ ist eine Untergruppe von $O*$ und

$T* = O*$, also teilt $|T*|$ die Ordnung 48 von $O*$ und es gilt $|T*| \leq 24$. Ist A, B, C, D ein in den Würfel einbeschriebenes reguläres Tetraeder, so überführt

jede Drehung, die das Tetraeder in sich abbildet, auch den Würfel in sich und

bildet Markierungsstreifen auf Markierungsstreifen ab (vgl. Bild 1.47).

Also ist T eine Untergruppe von $T*$. Schließlich ist $pO \in T*$, also ist $T \cup \{ pO \circ$

$\phi \mid \phi \in T \} \subset T *$. Da $T \cup \{ pO \circ \phi \mid \phi \in T \}$ bereits 24 Elemente hat, folgt

$T * = T \cup (pO \circ T)$

.

Bild 1.46

B

A

D

C

Bild 1.47

(1.20.7) Schließlich seien $C *$

n

bzw. ˜

$C\ n$ die Gruppen

$C *$

n

$= C\ n \cup (pO \circ C\ n)$

˜

$C\ n = C\ n \cup (s \circ C\ n)$

wobei s die Spiegelung and der Ebene senkrecht zu der Drehachse von $C\ n$

ist. Fr gerade n ist C $*$

n

$= \tilde{}$

C n; für ungerades n sind diese beiden Gruppen

verschieden.

Satz 1.8 *Jede endliche Untergruppe von* $O(3)$ *ist konjugiert zu einer der Gruppen*

a) C

$*$

n, C n , C n

oder $\tilde{}$

C n *mit* $n \geq 1$,

b) D

$*$

n, D n *oder* D n

mit $n \geq 2$,

c) T , T , *oder* T $*$,

d) O *oder* O $*$,

e) I *oder* I $*$.

Beweis Sei G eine endliche Untergruppe von $O(3)$. Falls $G \subset SO(3)$, so liefert

bereits Satz 1.7 das gewünschte Resultat. Wir können also annehmen, daß G nicht

in $SO(3)$ enthalten ist. Setze

$G := G \cap SO(3)$

.

Dies ist eine endliche Untergruppe von $SO(3)$. Nach Satz 1.7 gibt es also $\psi \in SO(3)$,

so daß $\psi \circ G \circ \psi - 1$ eine der Gruppen C n, D n, T , O , I ist. Indem wir G durch

$\psi \circ G \circ \psi - 1$ ersetzen, können wir annehmen, daß G eine der Gruppen C n, D n,

T , O , I ist. Um Satz 1.8 zu beweisen, verwenden wir die Tatsache, daß sich die

Eckpunkte der regulären Polyeder durch ihre Stabilisatoruntergruppen in T bzw. O

bzw. I charakterisieren lassen. Dann benutzen wir die folgende Aussage:

Ist $X \in S\ 2$ und $\psi \in G$, so ist

„

$StabG(\ \psi(\ X)) = \psi \circ StabG(\ X) \circ \psi - 1$,

(1.21)

insbesondere $|StabG(\ \psi(\ X))\ | = |StabG(\ X)\ |$.“

Falls ψ in der Untergruppe G liegt, ist dies eine direkte Folgerung aus Satz 1.3. *i*.

Falls ψ nicht in G liegt, ist immer noch klar, daß

$\psi \circ StabG(\ X) \circ \psi - 1 \subset StabG\ (\ \psi(\ X))$

Wir schreiben nun entsprechend Satz 1.2 die Abbildung ψ in der Form

$\psi = \psi \circ pO$

mit $\psi \in SO(3)$

Dann ist $\psi - 1 = pO \circ (\psi) - 1$. Ist nun $\phi \in StabG(X)$, so ist nach (1.3) $\psi \circ \phi \circ \psi - 1 = \psi \circ (pO \circ \phi \circ pO) \circ (\psi) - 1 = \psi \circ \phi \circ (\psi) - 1 \in SO(3)$ Also folgt

$\psi \circ StabG(X) \circ \psi - 1 \subset StabG(\psi(X))$

(1.22)

Indem man verwendet, daß $\psi - 1$ den Punkt $\psi(X)$ auf X abbildet, zeigt man analog,

daß

$\psi - 1 \circ StabG(\psi(X)) \circ \psi \subset StabG(X)$

Multipliziert man die letzte Inklusion von links mit ψ und von rechts mit $\psi - 1$, so

erhält man

$StabG(\psi(X)) \subset \psi \circ StabG(X) \circ \psi - 1$

Zusammen mit (1.22) ergibt dies die gewünschte Identität (1.21).

Nach diesem Intermezzo kehren wir zum Beweis von Satz 1.8 zurück. Wir disku-

tieren die verschiedenen Möglichkeiten für die Untergruppe $G = G \cap SO(3)$ von G

getrennt.

1. Fall $G = \mathrm{I}$: Die Punkte X auf S 2, für die $|StabG(X)| = 5$, sind die zwölf Eckpunkte eines Ikosaeders. Aus (1.21) folgt, daß jedes Element ϕ von G diese 12-elementige

Menge auf sich abbildet. Da ϕ jeweils eine Isometrie ist, ist ϕ eine Symmetrie des

Ikosaeders. Also ist G eine Untergruppe der Symmetriegruppe $\mathrm{I}\,*$ dieses Ikosaeders.

Nach Satz 1.4 teilt die Ordnung $|G|$ von G die Ordnung von $\mathrm{I}\,*$, also ist $|G|$ ein Teiler

von $120 = |\mathrm{I}\,*|$. Ebenso ist $60 = |G|$ ein Teiler von $|G|$, da G ja eine Untergruppe

von G ist. Folglich ist $|G| = 60$ oder $|G| = 120$. Da G eine echte Untergruppe von

G ist, ist $|G| > 60$, also ist $|G| = 120$ und somit $G = \mathrm{I}\,*$.

2. Fall $G = \mathrm{O}$: Die Punkte X auf $S\,2$, für die $|StabG(X)| = 3$, bilden die acht Ek-

ken eines Würfels. Mit denselben Argumenten wie oben zeigt man, daß G die volle

Symmetriegruppe dieses Würfels ist.

3. Fall $G = \mathrm{T}$: Sei

$M = \{ X \in S\,2 \; |StabG(X)| = 3 \}$

M besteht aus zwei Bahnen unter G, nämlich den Ecken M des Tetraeders und den

Ecken M

des dualen Tetraeders (vgl. Bild 1.48). M ist die Menge der Ecken eines

Würfels. Aus (1.21) folgt wie oben, daß G eine Untergruppe der Symmetriegruppe

$\mathrm{O}\,*$ dieses Würfels ist. Da T eine echte Untergruppe von G ist, folgt aus Satz

1.4,

Bild 1.48

daß $12 = |\mathrm{T}|$ ein Teiler von $|G|$ ist, daß $|G|$ ein Teiler von $|\mathrm{O}*| = 48$ ist, und daß

$|G| > 12$. Also ist $|G| = 24$ oder $|G| = 48$. Wäre $|G| = 48$, so wäre $G = \mathrm{O}*$ und somit $G = G \cap SO(3) = \mathrm{O}$, im Widerspruch zu der Annahme, daß $G = \mathrm{T}$. Also ist

$|G| = 24$.

Wie in (1.20.3) sei s eine Spiegelung an einer Ebene durch eine Kante des Tetra-

eders und den gegenüberliegenden Kantenmittelpunkt. Die volle Symmetriegruppe

des Tetraeders ist, wie wir oben festgestellt haben,

$\mathrm{T} = \mathrm{T} \cup \{ s \circ \phi \mid \phi \in \mathrm{T} \}$

Enthält G eine der Abbildungen $s \circ \phi_0$, $\phi_0 \in \mathrm{T}$, so enthält G die ganze Menge

$\{ s \circ \phi \mid \phi \in \mathrm{T} \}$, denn für $\phi \in \mathrm{T}$ ist $s \circ \phi = (s \circ \phi_0) \circ (\phi_0^{-1} \circ \phi)$, und $\phi_0^{-1} \circ \phi \in \mathrm{T} \subset G$.

0

0

In diesem Fall ist also $\mathrm{T} \subset G$. Da beide Gruppen die gleiche Ordnung haben, ist

also in diesem Fall $\mathrm{T} = G$.

Wir nehmen nun an, daß $G \cap \{ s \circ \phi \mid \phi \in \mathrm{T} \} = \emptyset$. Diese Annahme bedeutet

in anderen Worten, daß $G \cap \mathrm{T} = \mathrm{T}$. Da $|G| = 24$, $|\mathrm{T}| = 12$, enthält G genau 12

Elemente, die nicht in $SO(3)$ liegen. Die Gruppe $\mathrm{O}*$ enthält 24 derartige Elemente,

von denen 12 in T liegen und 12 nicht. Folglich ist

$$\mathrm{T} \cup \{ \phi \in \mathrm{O}^* | \phi \notin SO(3) , \phi \notin \mathrm{T} \} = G$$

Elemente von O^*, die nicht in $SO(3)$ und nicht in T liegen, sind von der Form $pO \circ \phi$

mit $\phi \in \mathrm{T}$. Also ist

$$G = \mathrm{T} \cup (pO \circ T) = \mathrm{T}^*$$

.

Die Fälle 4 und 5, nämlich daß $G = \mathrm{D}\, n$ oder $G = \mathrm{C}\, n$ behandelt man analog (siehe

z.B. [Grove–Benson]).

✷

Mit Satz 1.8 haben wir unser Ziel, alle möglichen Symmetrien von Polyedern im

Raum zu klassifizieren, erreicht. Wir wollen nun in exemplarischer Weise aufzeigen,

wie man diese Symmetriegruppen weiter studieren kann.

Satz 1.9 *Die Gruppe* O *aller Drehungen im Raum, die einen Würfel in sich über-*

f˙

uhren, ist isomorph zur symmetrischen Gruppe $S\,4$.

Beweis Sei M die vierelementige Menge der Raumdiagonalen des Würfels (vgl.

Bild 1.49). Jedes Element von O bildet eine Raumdiagonale wieder auf eine Raum-

Bild 1.49

diagonale ab. Wir erhalten also eine Operation von O auf der Menge *M*. Wie wir

am Ende von Abschnitt 1.2 festgestellt haben, entspricht dies einem Gruppenhomo-

morphismus

$\Phi : O \longrightarrow \sigma(M)$

Dieser Homomorphismus ist injektiv. Sind nämlich $\phi_1, \phi_2 \in O$, so daß $\Phi(\phi_1) =$

$\Phi(\phi_2)$, so ist $\Phi(\phi_1 \circ \phi_2^{-1}) = \Phi(\phi$

trivial

2

1) $\circ\ \Phi(\phi_2)^{-1} = id$. Also operiert $\phi := \phi_1 \circ \phi_2^{-1}$

2

auf *M*, d.h. ϕ bildet jede Raumdiagonale auf sich ab. Wir kennen alle Elemente von

O, und man sieht leicht, daß das einzige Element von O, das alle Raumdiagonalen

auf sich abbildet, die Identität ist. Also ist $\phi = id$, das heißt $\phi_1 = \phi_2$.

Numeriert man die Raumdiagonalen durch, so erhält man eine Bijektion

$M \longrightarrow \{1, 2, 3, 4\}$

Diese Bijektion induziert einen Isomorphismus

$\Psi : \sigma(M) \longrightarrow S_4$

Die Abbildung

$\Psi \circ \Phi : O \longrightarrow S_4$

.

ist dann noch immer ein injektiver Gruppenhomomorphismus. Da $|O| = |S_4| = 24$,

folgt, daß $\Psi \circ \Phi$ auch surjektiv ist, das heißt, daß $\Psi \circ \Phi$ ein Gruppenisomorphismus

ist.

..

Ubungen

1.) Welche Ordnung können Elemente der symmetrischen Gruppe S_6 haben?

2.) Zeigen Sie: T ist isomorph zu S_4!

3.) Konstruieren Sie einen injektiven Gruppenhomomorphismus $I \to S_5$ (Hinweis: In ein Ikosaeder läßt sich auf fünf verschiedene Weisen ein Würfel einbeschreiben)!

4.) Zeigen Sie: Ist G eine endliche Untergruppe von *Iso*, so gibt es einen Punkt O, der Fixpunkt aller Elemente von G ist!

5.) Zeigen Sie, daß C_n zu D_n isomorph ist, daß diese beiden Gruppen aber in $O(3)$ nicht konjugiert sind!

1.4

Erg¨

anzungen zu Kapitel 1

1.4.1

Regul¨

are Polyeder

Mit Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder haben wir fünf beson-

ders regelmäßige Polyeder kennengelernt, die sogenannten *Platonischen K¨*

orper . Sie

waren bereits in der Antike bekannt; ihre Konstruktion wird z.B. im letzten Buch

der Elemente von Euklid beschrieben. Auf ihre große Bedeutung in der Mathematik-

und Kulturgeschichte können wir hier nicht eingehen, wir verweisen für einen ersten

Eindruck auf [Brieskorn] I.1, [Coxeter 1963], [Klein 1884], [Slodowy].

Daß die Platonischen Körper besonders symmetrische Polyeder sind, zeigt sich

daran, daß ihre Symmetriegruppe

i) transitiv auf der Menge der Ecken operiert,

ii) transitiv auf der Menge der Kanten operiert,

iii) transitiv auf der Menge der Seitenflächen operiert.

Man kann zeigen, daß ein Polyeder, dessen Symmetriegruppe *(i), (ii), (iii)* erfüllt,

ein Platonischer Körper ist ([Coxeter 1973], sec. II, [Berger] 12.6). Läßt man eine der

obigen Bedingungen weg, so kann man noch immer alle Polyeder auflisten, die

die

beiden übriggebliebenen Bedingungen erfüllen. Für das gestutzte Ikosaeder aus Abb.

1.50 gelten nur *(i)* und *(ii)*. Dieses gestutzte Ikosaeder hat 60 Ecken, und die Seiten-

flächen sind reguläre Fünfecke oder Sechsecke. In der Mitte der 80’er Jahre wurde

entdeckt, daß sich 60 Kohlenstoffatome zu einem Molekül C60 verbinden können, das

die Form eines gestutzten Ikosaeders hat. Diese sog. Buckminster Fullerene“ werden

”

▪

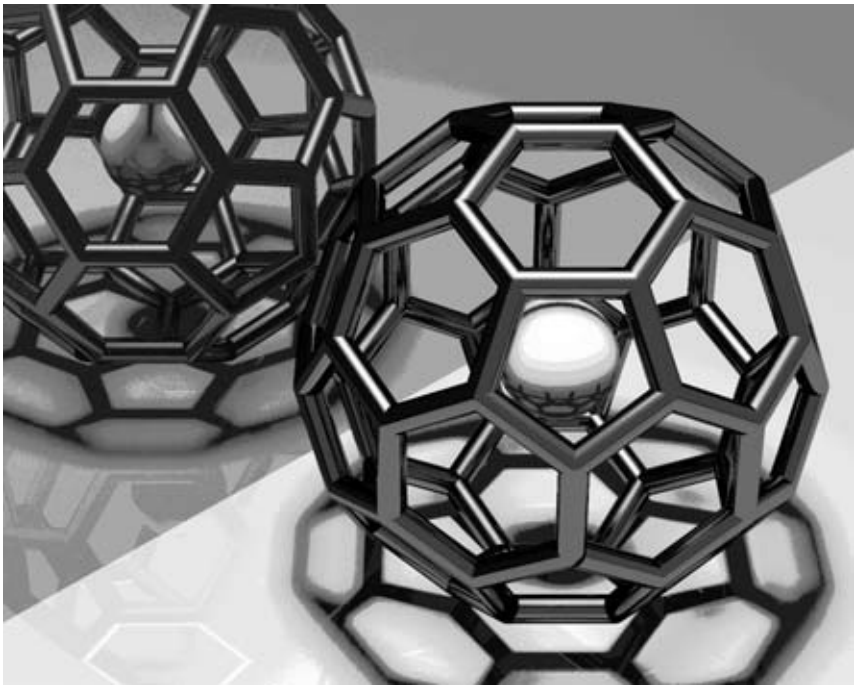


Bild 1.50 T. Koller and H.P. Lüthi, ray traced image of *C* 60 (Buckminsterfullerene) with

a “caged”metal atom.

in der Chemie und der Festkörperphysik intensiv studiert (siehe z.B.[Curl–Smalley],

[Krätschner–Schuster]).

1.4.2

Kristallographische Gruppen

Neben den endlichen Symmetriegruppen sind die Symmetriegruppen unendlich aus-

gedehnter Gebilde, in denen sich die Motive periodisch wiederholen, von besonde-

rem Interesse. Die Symmetriegruppe der Figur in Abbildung 1.51 von M.C. Escher

Bild 1.51

c 1995 M.C. Escher / Cordon Art – Baarn – Holland. All rights reserved.

enthält unendlich viele Translationen. Wir bezeichnen mit T die Menge aller Trans-

lationen in der Ebene (bzw. im Raum); dies ist eine Untergruppe der Gruppe *Iso*

.

aller Isometrien. Ist G irgendeine Untergruppe von *Iso*, so ist $G \cap T$, die Menge aller

Translationen in G, eine Untergruppe von G.

Definition: Eine Untergruppe G der Gruppe *Iso* aller Isometrien der Ebene (bzw.

des Raums) heißt *kristallographische Gruppe*, falls

i) die Stabilisatoruntergruppe $StabG(X)$ jedes Punktes X der Ebene (bzw.

des Raums) in G endlich ist,

ii) es Translationen t_1, t_2 (bzw. t_1 , t_2 , t_3) in linear unabhängige Richtungen gibt, so daß sich jedes Element g von $G \cap T$ in der Form

$g = t_{n_1}$

$_{n_2}$

$_1$

$\circ\, t_2$

mit

$n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$

(bzw.

$g = t\,n\,1$

$n\,2$

$n\,3$

1

$\circ\, t\,2 \circ t\,3$

mit

$n\,1\,, n\,2\,, n\,3 \in \mathrm{Z}$)

schreiben läßt.

Die Bedingung *ii)* in der obigen Definition formuliert man oft kürzer so:

$G \cap T$ wird von Translationen in zwei (bzw. drei) linear unabhängige Richtungen

”erzeugt.“

Die Symmetriegruppen von Kristallen im Raum oder von Tapetenmustern“ in

”

der Ebene sind kristallographische Gruppen. Ähnlich wie die endlichen Untergrup-

pen von $SO(3)$ und $O(3)$ lassen sich auch die kristallographischen Gruppen in der

Ebene und im Raum klassifizieren. Dabei wird die Klassifikation wieder einfacher,

wenn man sich auf orientierungserhaltende Isometrien beschränkt. Es bezeichne *Iso+*

die Gruppe aller orientierungserhaltenden Isometrien der Ebene bzw. des Raums.

Dann kann man zeigen (siehe z.B. [Berger] 1.7, [Nikulin–Shafarevich] *§* 8):

Satz 1.10 *Jede kristallographische Untergruppe der Gruppe Iso+ aller orientierungs-*

erhaltenden Isometrien der Ebene ist in Iso+ konjugiert zu der Gruppe aller orien-

tierungserhaltenden Symmetrien einer der f¨

unf Typen von Figuren (in Abbildung

1.52) in der Ebene.

Man beachte, daß dabei — abhängig von der Größe der Bausteine und links oben in

Figur 1.52 auch vom Winkel — unendlich viele Konjugationsklassen auftreten.

Bei der Klassifikation beliebiger kristallographischer Gruppen in der Ebene bis

auf Konjugation in der vollen Isometriegruppe *Iso* erhält man insgesamt 17 Typen

von Gruppen (siehe z.B. [Armstrong] ch. 26, [Bix] Kapitel 2, [Quaisser] 5.4). Im Fall

des Raumes führen die entsprechenden Klassifikationen jeweils auf über 100 Typen

von Gruppen ([Burckhardt], [Quaisser], 6.3).

Ein wichtiger Schritt bei der Durchführung dieser Klassifikationen ist stets die

Bestimmung der möglichen Stabilisatoruntergruppen von Punkten in der Ebene bzw.

im Raum. So kommen die Sätze 1.5, 1.7, 1.8 zum Tragen. Satz 1.10 zeigt, daß für eine

kristallographische Untergruppe von *Iso*+ in der Ebene die

Stabilisatoruntergruppe

eines Punktes entweder trivial oder zu C 2, C 3 , C 4 oder C 6 isomorph ist. Insbesondere

tritt also C 5 oder C 7 nicht als Stabilisatoruntergruppe eines Punktes auf. Ebenso

kann man zeigen, daß I oder I $*$ nicht als Stabilisatoruntergruppen eines Punktes

unter einer kristallographischen Raumgruppe auftreten, d.h., daß es keine auf dem

Ikosaeder basierende Kristallstruktur gibt.

1.4 Ergänzungen zu Kapitel 1

63

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J J

J J

J J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J J

J J

J J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J

J J J J

JJ

JJ

J

J

J

J

J

J

J J J J J J

JJ

JJ

JJ

J

J

J

J

J

J

J

J

J J J J J J J J

JJ

JJ

JJ

JJ

Bild 1.52

Mit der Klassifikation der Symmetriegruppen ist die Frage nach der Bestimmung aller Kristallstrukturen allerdings noch nicht vollständig beantwortet.

Z.B. in [Bigalke–Wippermann] kann man nachlesen, wie viele schöne Strukturen schon in der Ebene auftreten.

1.4.3

Der Brouwersche Fixpunktsatz

In Lemma 3 haben wir bewiesen, daß es für jede Isometrie ϕ des Raumes, die O als Fixpunkt hat, einen Punkt P auf der Sphäre $S\,2$ um O mit Radius 1 gibt, der entweder Fixpunkt von ϕ ist oder von ϕ auf seinen Antipodalpunkt abgebildet wird.

Diese Aussage gilt allgemeiner für beliebige stetige Abbildungen von $S\,2$ nach $S\,2$:

Satz 1.11 (Spezialfall des Brouwerschen Fixpunktsatzes)

Sei $f : S\,2 \to S\,2$ *eine stetige Abbildung. Dann gibt es einen Punkt* $P \in S\,2$ *, so daß*

$f(P) = P$ *oder* $f(P) = pO(P)$.

Einen Beweis dieses Satzes findet man z.B. in [Milnor] oder [Ossa] 1.6. Eine Kon-

sequenz daraus wird häufig mit dem Satz umschrieben: Einen Igel kann man nicht

„

kämmen“. Damit soll folgender Sachverhalt beschrieben werden: Stellen Sie sich vor,

an jedem Punkt von S 2 wäre ein Haar der Länge 1 befestigt. Aufgabe des Coiffeurs

.

ist es, auf stetige Weise alle Haare glatt auf die Sphäre zu legen, so daß die Spitze

des Haares nie auf die Haarwurzel“, das heißt den Punkt von S 2 , in dem das Haar

”

befestigt ist, zu liegen kommt. Diese Aufgabe ist nicht lösbar. Nehmen wir an, die

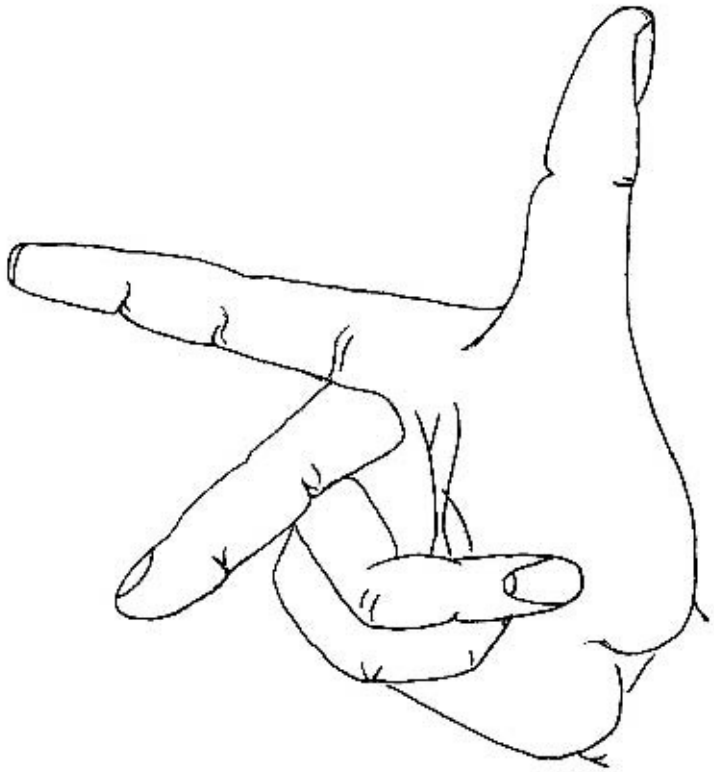
Aufgabe hätte eine Lösung. Dann sei $f : S\,2 \to S\,2$ die Abbildung, die jedem Punkt

X der Sphäre den Endpunkt des gelegten Haares“ mit Haarwurzel in X zuordnet.

”

Es ist stets $f(X) = X$. Da die Haare Länge 1 haben, ist auch stets $f(X) = pO(X)$.

Nach dem Brouwerschen Fixpunktsatz ist das unmöglich.



2

Skalarprodukt und Vektorprodukt

Unter einem *Vektor* verstehen wir in diesem Kapitel eine Konfiguration

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

von untereinandergeschriebenen reellen Zahlen x_1, x_2, x_3. Solche Vektoren wollen wir

als gerichtete Strecken“ im Raum interpretieren. Dazu führen wir cartesische Ko-

”

ordinaten im Raum ein. Das heißt, wir wählen drei von einem Punkt O ausgehende

Strahlen S_1, S_2, S_3, die paarweise aufeinander senkrecht stehen, so daß S_2 und S_3 –

von einem Punkt von S_1 aus gesehen – wie Uhrzeiger, die auf 3 Uhr bzw. 12 Uhr

zeigen, liegen. Anders gesagt, S_1, S_2, S_3 liegen wie Zeigefinger, Mittelfinger und Dau-

men der (wie in Bild 2.1) gespreizten rechten Hand. g_1, g_2, g_3 seien die Geraden, die

die Strecken S_1, S_2, S_3 verlängern (siehe Bild 2.2).

Bild 2.1 Rechte-Hand-Regel

Ist P ein Punkt im Raum, so sind seine cartesischen Koordinaten p_1, p_2, p_3 wie folgt

definiert. Es sei π_i die orthogonale Projektion des Raums auf die Gerade g_i (i =

1 , 2 , 3)(siehe Bild 2.3). Der Punkt

$\pi_i(P)$ liegt also auf der Geraden g_i. Die i-te

cartesische Koordinate p_i von P ist definiert als der Abstand des Punktes O zum

.

S2

g1

S1

O

g2

g3

Bild 2.2

Punkt $\pi i(P)$, falls dieser Punkt auf dem Strahl Si liegt, und als das Negative des

Abstandes von O zu $\pi i(P)$, falls $\pi i(P)$ auf der Si entgegengesetzten Seite von gi liegt.

Offenbar gibt es für jedes Tripel (p_1 , p_2 , p_3) reeller Zahlen einen eindeutig bestimmten

Punkt P im Raum, der p_1 , p_2 , p_3 als cartesische Koordinaten hat.

S3

S2

P

S1

O

π1(P)

Bild 2.3

Ist nun

(

⎞

x_1

$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_2 \end{pmatrix}$

2

x_3

ein Vektor, so stellen wir uns vor, daß **x** die gerichtete Strecke von *O* aus zu dem

Punkt beschreibt, dessen cartesische Koordinaten x_1, x_2, x_3 sind (siehe Bild 2.4).

.

67

(x1, x2, x3)

x2

(x1, x2, 0)

x3

x1

O

Bild 2.4

Für Vektoren sind eine Reihe von Operationen definiert.

Sind

⎛

⎞

⎛ ⎞

x_1

y_1

$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_2 \end{pmatrix}$

und $\mathbf{y} =$

y_2

x_3

y_3

Vektoren, so ist die Summe $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ *der Vektoren* $\mathbf{x}$ *und* $\mathbf{y}$ *definiert als*

$x_1 + y_1$

$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_2 + y_2 \end{pmatrix}$

$x_3 + y_3$

Man überlegt sich leicht, daß $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ die gerichtete Strecke beschreibt, die O mit dem

Punkt verbindet, der durch Anhängen der gerichteten Strecke $\mathbf{y}$ an die gerichtete

Strecke $\mathbf{x}$ entsteht (siehe Bild 2.5).

y

x

x+y

O

Bild 2.5

.

Ist

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

ein Vektor und λ *eine reelle Zahl, so ist* $\lambda \cdot \mathbf{x}$ *der Vektor*

$$\lambda \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \lambda \cdot x_2 \end{pmatrix}$$

$\lambda \cdot x$ 3

das Produkt *von* λ *und* **x** .

Ist $\lambda > 0$, so beschreibt $\lambda \cdot$ **x** den Vektor, der von O ausgehend in dieselbe Richtung

wie **x** geht, aber die λ-fache Länge hat (siehe Bild 2.6).

λ.x

x

O

Bild 2.6

Ist $\lambda < 0$, so beschreibt $\lambda \cdot$ **x** den Vektor, der von O ausgehend in die zu **x** entgegen-

gesetzte Richtung zeigt und die $|\lambda|$ -fache Länge hat.

Sind

⎛

⎝

⎛ ⎝

x 1

y 1

x = ⎝ x ⎠

⎝ ⎠

2

und **y** =

y_2

x_3

y_3

Vektoren, so definiert man das Skalarprodukt *von* **x** *und* **y** *als die reelle Zahl*

$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$

Eine geometrische Interpretation des Skalarproduktes geben wir in Abschnitt 2.1.

Sind

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

und $\mathbf{y} =$

y_2

x_3

y_3

Vektoren, so definiert man das Vektorprodukt *oder* Kreuzprodukt *von* **x** *und* **y** *als den Vektor*

69

$\left(\right.$

$\backslash$

$x\,2\,y\,3 - x\,3\,y\,2$

$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \backslash\ x$

$\left.\right)$

$3\,y\,1 - x\,1\,y\,3$

$x\,1\,y\,2 - x\,2\,y\,1$

In einer Zeile von **x** × **y** stehen die über Kreuz genommenen Produkte der Einträge

von **x** und **y** aus den beiden anderen Zeilen nach dem Schema in Bild 2.7.

=

−

+

+

=

−

−

=

+

Bild 2.7

Eine geometrische Interpretation des Vektorproduktes geben wir in Abschnitt 2.2.

..

Ubung: Zeigen Sie

$(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$

$=$

$\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$

$\mathbf{x} + \mathbf{y}$

$=$

$\mathbf{y} + \mathbf{x}$

$\lambda \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda \cdot \mathbf{x} + \lambda \cdot \mathbf{y}$

$(\lambda \cdot \mu) \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot (\mu \cdot \mathbf{x})$

$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$

$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}$

und

$(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{z}$

$(\lambda \cdot \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \lambda \cdot (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot (\lambda \cdot \mathbf{y})$ $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = -\mathbf{y} \times \mathbf{x}$

$\mathbf{x} \times (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \times \mathbf{y} + \mathbf{x} \times \mathbf{z}$

$(\lambda \cdot \mathbf{x}) \times \mathbf{y} = \lambda \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y})$

für Vektoren $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ und reelle Zahlen λ, μ !

.

.

.

.
.
.
.
.
.

2 Skalarprodukt und Vektorprodukt

2.1

Skalarprodukt von Vektoren

⎛

⎝

x 1

Ist **x** = ⎝ x ⎠

2

ein Vektor, so definiert man die L¨

ange oder *Norm* von **x** als

x 3

√

x

=

x · **x** =

x 2 + x 2 + x 2

1

2

3

Mit Hilfe des Satzes von Pythagoras wollen wir uns überzeugen, daß dies in der

Tat die Länge der Strecke von *O* zum Punkt *P* mit den cartesischen Koordinaten

x_1, x_2, x_3 ist. Dazu führen wir den Hilfspunkt *P* mit den cartesischen Koordinaten

$x_1, x_2, 0$ ein (siehe Bild 2.8).

S2

P’

π (P)

2

|x |

2

S1

O

|x |

1

π (P)

1

Bild 2.8

Im rechtwinkligen Dreieck $O\ \pi_1(P)\ P$

hat die Strecke zwischen O und π 1(P) die

Länge |x 1 |, und die Strecke zwischen π 1(P) und P hat die Länge |x 2 |. Nach dem Satz von Pythagoras hat also die Strecke OP zwischen O und P die Länge

x 2 + x 2

1

2

Nun betrachten wir das rechtwinklige Dreieck O P P (siehe Bild 2.9).

Die Strecke OP hat, wie gesagt, die Länge

x 2 + x 2, die Strecke P P hat die

1

2

Länge |x 3 |, also hat —wiederum nach dem Satz von Pythagoras — die Strecke OP

die Länge

(

x 2 + x 2)2 + x 2 =

x 2 + x 2 + x 2 = **x**

1

2

3

1

2

3

Bemerkung 16 Kennt man die Länge aller Vektoren, so kann man mit Hilfe der

Polarisationsidentit¨

at

$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 1$

$\mathbf{x} + \mathbf{y}\ 2 - \mathbf{x}\ 2 - \mathbf{y}\ 2$

(2.1)

2

.

S3

S2

P

π3(P)

P’

|x3|

S1

O

Bild 2.9

das Skalarprodukt von je zwei Vektoren rekonstruieren. Der Beweis der Polarisations-

identität bleibt den LeserInnen als Übung überlassen.

⎛ ⎞

0

Sind **x** und **y** von **0** = ⎝ 0 ⎠ verschiedene Vektoren, so definiert man den *Winkel*

0

zwischen **x** und **y** folgendermaßen: Zeigen die Strahlen *S***x** von *O* aus in Richtung **x**

und *S***y** von *O* aus in Richtung **y** weder in die gleiche noch in die entgegengesetzte

Richtung, so gibt es genau eine Ebene, die diese beiden Strahlen enthält. Der Winkel

zwischen den beiden Strahlen *S***x** und *S***y** in dieser Ebene (der zwischen 0 ◦ und 180 ◦

liegt) ist dann der Winkel zwischen **x** und **y**. Falls der Winkel zwischen *S***x** und *S***y**

gleich 90 ◦ ist oder einer der beiden Vektoren gleich **0** ist, so sagen wir, daß **x** und **y**

aufeinander senkrecht stehen.

Lemma 17 *Seien* **x** *und* **y** *Vektoren. Dann stehen* **x** *und* **y** *genau dann aufeinander senkrecht, wenn* **x** · **y** = 0 .

Beweis Falls **x** = **0**, so ist auch **x** · **y** = 0 . Wir können also annehmen, daß **x** = **0**.

Dann liegt auf der Geraden durch **y** in Richtung von **x** genau ein Punkt **y** so, daß

die Vektoren **x** und **y** aufeinander senkrecht stehen (siehe Bild 2.10). Die Gerade

durch **y** in Richtung von **x** ist die Menge

$\mathbf{y} + t \cdot \mathbf{x}$ $t \in \mathbb{R}$

Also können wir

.

.

.

.

y’

y

O

x

Bild 2.10

$\mathbf{y}$

$= \mathbf{y} + t_0 \cdot \mathbf{x}$

mit $t_0 \in \mathbb{R}$

schreiben. Die Punkte $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ bilden ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Kathe-

ten die Längen $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$

haben, und dessen Hypotenuse die Länge $\mathbf{x} - \mathbf{y}$

hat.

Nach dem Satz von Pythagoras ist

$\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 =$

$\mathbf{x} - \mathbf{y}\ 2$

Wenden wir die Polarisationsidentität (2.1) auf die Vektoren $\mathbf{x}$ und $-\mathbf{y}$ an, so ergibt

sich

$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$

Folglich ist

$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} - t\ 0 \cdot \mathbf{x}\ 2 = -t\ 0 \cdot \mathbf{x}\ 2$

Insbesondere ist $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$ genau dann, wenn $t\ 0 = 0$, das heißt, wenn $\mathbf{y} = \mathbf{y}$. Nach

Definition von $\mathbf{y}$ ist das äquivalent dazu, daß $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ aufeinander senkrecht stehen.

✷

Allgemeiner gilt

Satz 2.1 *Seien* $\mathbf{x}$ *und* $\mathbf{y}$ *zwei von* $\mathbf{0}$ *verschiedene Vektoren und* α *der Winkel zwischen* $\mathbf{x}$ *und* $\mathbf{y}$. *Dann gilt*

$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} =$

$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \cdot \cos \alpha$

Beweis Indem wir eventuell $\mathbf{y}$ durch $-\mathbf{y}$ ersetzen, können wir annehmen, daß

$-90^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$. Setze

$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$

$\mathbf{x} :=$

$\cdot\ \mathbf{x}$

$\mathbf{x}\ 2$

Dann ist

$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$

$\mathbf{x}\ 2 \cdot \mathbf{x}$

$= \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$

$\mathbf{x}\ 2\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$

Nach Lemma 17 stehen **x** und (**y** − **x**) aufeinander senkrecht (siehe Bild 2.11). Die

Punkte **0** , **x** und **y** bilden ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Winkel an der Ecke

0 gleich α ist. Nach Definition von cos α ist

.

.

.

.

y

y-x’

α

O

x’

x

Bild 2.11

x

$= \mathbf{y} \cdot \cos \alpha$

Nun ist

$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}|$

$\mathbf{x}$

$=$

$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$

$\mathbf{x}\ 2 \cdot \mathbf{x} =$

$\mathbf{x}$

also ist

$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \cdot \cos \alpha$

Damit ist die behauptete Gleichung bis aufs Vorzeichen bewiesen, d.h. es gilt

$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \pm\, \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \cdot \cos \alpha$

(2.2)

Um das Vorzeichen zu bestimmen, betrachten wir die Funktion $f : \mathrm{R} \longrightarrow \mathrm{R}$, die jedem $t \in \mathrm{R}$ die Zahl

$f(t) = \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + t \cdot \mathbf{x})$

zuordnet. Offenbar ist

$f(t) > 0$

für $t > |\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}|$

$\mathbf{x}\ 2$

(2.3)

Ferner bilden **x** und **y** + $t \cdot$ **x** für alle nichtnegativen t einen spitzen Winkel (siehe Bild 2.12).

y

y + t.x

O

x

Bild 2.12

Deswegen ist

$f(t) = 0$

für $t \geq 0$

(2.4)

Da f eine stetige Funktion ist, folgt aus dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen

([Forster] 1, § 11), daß $f(0) > 0$. Mit anderen Worten, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} > 0$. Da auch $\cos \alpha > 0$, gilt also das Vorzeichen + in (2.2). Damit ist Satz 2.1 bewiesen.

✷

Da stets $|\cos \alpha| \leq 1$, ergibt sich aus Satz 2.1 eine direkte Folgerung, oder wie man

auch sagt, ein Korollar.

Korollar 18 *(* Cauchy - Schwarz'sche Ungleichung *) Sind* **x** *und* **y** *Vektoren in* R3 *, so ist*

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$$

Bemerkung 19 Die Definition des Skalarprodukts überträgt sich auf naheliegende

Weise auf Vektoren

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

beliebiger Länge n. Im weitern werden wir ab und zu auch den Fall $n = 2$ benutzen.

Satz 2.1 und Korollar 18 gelten natürlich auch in diesem Fall.

2.2

Das Vektorprodukt

Sind **x** und **y** von **0** verschiedene Vektoren, und zeigt **y** weder in die Richtung von

x noch in die entgegengesetzte Richtung, so bilden der Punkt O, der Punkt mit den

Koordinaten x_1, x_2, x_3, der Punkt mit den Koordinaten y_1, y_2, y_3 und der Punkt mit den Koordinaten $x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3$ ein Parallelogramm (siehe Bild 2.13). Wir nennen es das von **x** und **y** aufgespannte Parallelogramm. Es liegt in der von **x** und

y aufgespannten Ebene. Die Fläche dieses Parallelogramms ist

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \cdot \sin \alpha$$

wobei α den Winkel zwischen **x** und **y** bezeichnet.

y

x+y

||y||.sinα

O

x

Bild 2.13

Zeigt **y** in die selbe Richtung wie **x** oder in die entgegengesetzte Richtung, so sagen

wir, die Fläche des von **x** und **y** aufgespannten Parallelogramms sei 0.

.

Satz 2.2 *Seien* **x** *und* **y** *zwei von* **0** *verschiedene Vektoren. Dann gilt*

(i) Der Vektor **x** × **y** *steht senkrecht auf* **x** *und* **y** .

(ii) Die L¨

ange von **x** × **y** *ist die Fläche des von* **x** *und* **y** *aufgespannten Parallelogramms.*

(iii) Rechte-Hand-Regel: Seien **x** *und* **y** *von Null verschiedene Vektoren, die weder*

in die gleiche noch in entgegengesetzte Richtung zeigen. Legt man den Zeigefin-

ger der (wie in Bild 2.1) gespreizten rechten Hand in Richtung von **x** *und den*

Mittelfinger in Richtung von **y** *, so zeigt der Daumen in Richtung von* **x** × **y** .

Beweis (i) Es ist zu zeigen, daß

x · (**x** × **y**) = 0 und **y** · (**x** × **y**) = 0

Dies rechnen wir direkt nach:

⎛

⎜⎛

⎜

x 1

x 2 *y* 3 − *x* 3 *y* 2

x · (**x** × **y**) = ⎝ *x* ⎠ ⎝

)

2

$\cdot x_3 y_1 - x_1 y_3$

x_3

$x_1 y_2 - x_2 y_1$

=

$x_1 x_2 y_3 - x_1 x_3 y_2 + x_2 x_3 y_1$

$- x_2 x_1 y_3 + x_3 x_1 y_2 - x_3 x_2 y_1$

=

0

Also ist $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = 0$ für alle Vektoren $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$. Indem wir die Rollen von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ vertauschen, folgt daraus auch

$0 = \mathbf{y} \cdot (\mathbf{y} \times \mathbf{x}) = -\mathbf{y} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y})$

denn es ist ja $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = -\mathbf{y} \times \mathbf{x}$.

(ii) Nach dem, was wir oben gesagt haben, ist zu zeigen, daß

$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \mathbf{x}$

$\mathbf{y} \mid \sin \alpha|$

Wegen der Formel

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

und Satz 2.1 genügt es, zu zeigen, daß

$\mathbf{x} \times \mathbf{y}\ 2 + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})2 =$

$\mathbf{x}\ 2\ \mathbf{y}\ 2$

Das können wir wieder direkt nachrechnen:

$\mathbf{x} \times \mathbf{y}\ 2 + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})2$

$=$

$(x\ 2\ y\ 3 - x\ 3\ y\ 2)2 + (x\ 3\ y\ 1 - x\ 1\ y\ 3)2 + (x\ 1\ y\ 2 - x\ 2\ y\ 1)2$

$+ (x\ 1\ y\ 1 + x\ 2\ y\ 2 + x\ 3\ y\ 3)2$

Faßt man erst alle Quadrate und dann alle gemischten Terme, die beim Ausmulti-

plizieren entstehen, zusammen, so ergibt sich

$x\ 2\ y\ 2 + x\ 2\ y\ 2 + x\ 2\ y\ 2 + x\ 2\ y\ 2 + x\ 2\ y\ 2 + x\ 2\ y\ 2$

2 3

3 2

3 1

1 3

1 2

2 1

$+ x\ 2\ y\ 2 + x\ 2\ y\ 2 + x\ 2\ y\ 2$

1 1

2 2

3 3

$- 2 x_2 y_3 x_3 y_2 - 2 x_3 y_1 x_1 y_3 - 2 x_1 y_2 x_2 y_1$

$+ 2 x_1 y_1 x_2 y_2 + 2 x_1 y_1 x_3 y_3 + 2 x_2 y_2 x_3 y_3$

=

$(x_2 + x_2 + x_2) \cdot (y_2 + y_2 + y_2)$

1

2

3

1

2

3

Also ist in der Tat

$\mathbf{x} \times \mathbf{y}\, 2 + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})2 =$

$\mathbf{x}\, 2\, \mathbf{y}\, 2$

(iii) Mit (i) und (ii) haben wir bewiesen, daß $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ senkrecht auf **x** und **y** steht und

die Länge **x**

y | sin α| hat. Ist sin $\alpha = 0$, so sind wir fertig. Andernfalls ist $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$

durch die eben genannten beiden Bedingungen bis aufs Vorzeichen bestimmt. Wir

müssen uns jetzt nur noch um dieses Vorzeichen kümmern. Liegen **x** und **y** beide in

der Ebene E, die von g 1 und g 2 aufgespannt wird, d.h. ist x 3 = y 3 = 0, so ist

⎛

⎝

0

$\mathbf{x} \times \mathbf{y} =$ ⎝

0

⎠

x 1 y 2 − x 2 y 1

x

Die dritte Komponente von $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ ist also das Skalarprodukt des Vektors

1

mit

x 2

y

y

dem Vektor $\mathbf{y}$ ⊥ =

2

1

−

, der in der Ebene E aus

durch Drehung um O

y 1

y 2

um den Winkel − 90 ◦ hervorgeht. Also ist in diesem Fall die dritte Komponente von

x × **y** gleich

x 1

.

y 2

· cos(α − 90 ◦) = **x** · **y** · sin α

x 2

−y 1

In anderen Worten, die dritte Komponente von **x** × **y** ist positiv genau dann, wenn

der Winkel, den **x** und **y** einschließen, zwischen 0 ◦ und 180 ◦ liegt. Somit gilt die

Rechte - Hand - Regel in dem Spezialfall, daß x 3 = y 3 = 0. Den allgemeinen Fall

führen wir nun mit Hilfe eines Stetigkeitsarguments“ auf diesen Spezialfall zurück.

”

Falls **x** und **y** nicht beide in der Ebene E liegen und α = 0 ◦, 180 ◦, so spannen **x** und **y** eine Ebene E auf, die die Ebene E längs einer Geraden g trifft (siehe Bild 2.14).

Sei β der Winkel zwischen diesen beiden Ebenen. Mit R(t) bezeichnen wir die Dre-

hung um die Achse g mit Drehwinkel $t \cdot \beta$. Dann ist $R(0)$ die Identität id, während

$R(1)$ die Ebene E auf die Ebene E abbildet. Setze

$\mathbf{x}(t) := R(t)(\mathbf{x})$

$\mathbf{y}(t) := R(t)(\mathbf{y})$

Dann ist

$\mathbf{x}(t)$

$=$

$\mathbf{x}$

$\mathbf{y}(t)$

$=$

$\mathbf{y}$

und der Winkel zwischen $\mathbf{x}(t)$ und $\mathbf{y}(t)$ ist stets gleich α. Desweiteren bezeichne

$\mathbf{z}(t)$ den Vektor senkrecht zu $\mathbf{x}(t)$ und $\mathbf{y}(t)$ der Länge

$\mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{y}(t) \cdot \sin \alpha$, der

zusammen mit $\mathbf{x}(t)$ und $\mathbf{y}(t)$ die Rechte-Hand-Regel erfüllt. Es ist anschaulich klar,

daß $\mathbf{z}(t)$ stetig von t abhängt. Aus den bereits bewiesenen Teilen (i) und (ii) folgt,

daß für $t \in [0 , 1]$

.

E’

g

E

β

Bild 2.14

$\mathbf{x}(t) \times \mathbf{y}(t) = \varepsilon(t) \cdot \mathbf{z}(t)$

mit $\varepsilon(t) = \pm 1$. Da $\mathbf{x}(t)$ und $\mathbf{y}(t)$ sowie $\mathbf{z}(t)$ stetig von t abhängen, ist $t \to \varepsilon(t)$ eine stetige Funktion auf dem Intervall [0 , 1]. Diese stetige Funktion nimmt nur die Werte

+1 und − 1 an, also folgt aus dem Zwischenwertsatz, daß

$\varepsilon(0) = \varepsilon(1)$

$\mathbf{x}(0)$ und $\mathbf{y}(0)$ aber liegen beide in der Ebene E. Wir haben uns oben überlegt, daß

für Vektoren in der Ebene E die Rechte-Hand-Regel gilt. Somit ist

$\mathbf{x}(0) \times \mathbf{y}(0) = \mathbf{z}(0)$

$\varepsilon(0) = 1$

Folglich ist auch $\varepsilon(1) = 1$, also

$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \mathbf{x}(1) \times \mathbf{y}(1) = \mathbf{z}(1)$

Somit gilt die Rechte - Hand - Regel auch für das Vektorprodukt von **x** und **y**.

✷

Aus der geometrischen Beschreibung des Skalarprodukts in Satz 2.1 und des Vek-

torprodukts in Satz 2.2 ergibt sich

Korollar 20 *Ist R eine Drehung um eine Achse durch O, so gilt f¨*

ur je zwei Vektoren

$\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$

$R(\mathbf{x}) \cdot R(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$

,

$R(\mathbf{x}) \times R(\mathbf{y}) = R(\mathbf{x} \times \mathbf{y})$

Bemerkung 21 Die zweite Gleichung aus Korollar 20 besagt, daß das Vektorpro-

dukt mit Drehungen im Raum verträglich ist. Dies gilt nicht für beliebige lineare

Abbildungen. Ist etwa $A(\mathbf{x}) = \lambda \cdot \mathbf{x}$, so gilt

$A(\mathbf{x}) \times A(\mathbf{y}) = \lambda\, 2 \cdot \mathbf{x} \times \mathbf{y}$

aber

$\mathrm{A}(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = \lambda \cdot \mathbf{x} \times \mathbf{y}$

.

.

.

Aus diesem Grund nennt man in der physikalischen Literatur das Ergebnis des

Vektorprodukts nicht wieder einen Vektor, sondern einen Tensor“. In der Vorle-

„

sung über Lineare Algebra (oder multilineare Algebra) werden Sie sehen, wie sich

das Vektorprodukt auf *n*-komponentige Vektoren verallgemeinern läßt (siehe z.B.

[Kowalsky], *§* 45). Das Ergebnis ist dann ein Vektor mit $n(n-1)$ Komponenten. Von

2

diesem Standpunkt aus gesehen ist es ein glücklicher Zufall, daß $3(3-1) = 3$.

2

Neben dem Skalar- und dem Vektorprodukt führt man oft auch das *Spatprodukt*

$(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z}$ dreier Vektoren $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ ein. Ähnlich wie oben kann man zeigen, daß die Zahl $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z}$ dem Betrag nach gleich dem Volumen des von $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ und $\mathbf{z}$ aufgespannten Parallelepipeds ist (siehe Bild 2.15).

x+y+z

z

y

O

x

Bild 2.15

Es stellt sich heraus, daß das Spatprodukt gleich der Determinante der (3×3)-

Matrix ist, deren Spalten die Vektoren $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ und $\mathbf{z}$ sind.

$$(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$$

)

2 y 2 z 2

x 3 y 3 z 3

Deshalb verzichten wir hier darauf, das Spatprodukt eingehender zu diskutieren, und

verweisen auf Bücher über Lineare Algebra.

..

Ubung: Zeigen Sie, daß für je drei Vektoren $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$

i) $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{z} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{z}) \cdot \mathbf{y} - (\mathbf{y} \cdot \mathbf{z}) \cdot \mathbf{x}$ ii) $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{z} + (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) \times \mathbf{x} + (\mathbf{z} \times \mathbf{x}) \times \mathbf{y} = \mathbf{0}$

iii) $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{z} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{z})(\mathbf{y} \cdot \mathbf{w}) - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{w})(\mathbf{y} \cdot \mathbf{z})$ für Vektoren $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$, $\mathbf{w}$ iv) Geben Sie ein Beispiel von drei Vektoren $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$, so daß $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{z} = \mathbf{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z})$!

.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.

2.3 Ergänzungen zu Kapitel 2

..

Ubung: Sei A die Abbildung, die

⎛

⎝

⎛

⎝

x 1

x 1 + x 2

⎝ x ⎠

⎝

⎠

2

auf

x 2

x 3

x 3

abbildet. Zeigen Sie, daß es Vektoren **x** , **y** gibt, so daß $A(\mathbf{x}) \times A(\mathbf{y}) = A(\mathbf{x} \times \mathbf{y})$!

2.3

Erg¨

anzungen zu Kapitel 2

2.3.1

Divergenz, Gradient und Rotation

Ist $f(x_1, x_2, x_3)$ eine differenzierbare Funktion in den drei Variablen x_1, x_2, x_3, so definiert man den *Gradienten* von f als die Abbildung $\nabla f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die durch

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f}{\partial x_3}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Dabei ist $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{x})$ die j-te partielle Ableitung von f an der Stelle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$,

das heißt, die Ableitung, die man erhält, wenn man alle Variablen außer der j-ten

fest hält. Beispielsweise ist für

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_2 + x_3 + x_7 + x_1 x_2 x_3 \tag{2.5}$$

⎛

⎜

2 x 1 + x 2 x 3

$\nabla f(\mathbf{x})$ = ⎜ 3 x 2 + x

⎝

(2.6)

2

1 x 3

7 x 6 + x

3

1 x 2

Ist F : R3 → R3 eine differenzierbare Abbildung, das heißt

⎛

⎜

F 1(x 1 ,x 2 ,x 3)

F (x

⎜

⎝

1 ,x 2 ,x 3) =

F 2(x 1 ,x 2 ,x 3)

F 3(x 1 ,x 2 ,x 3)

mit differenzierbaren Funktionen F_1, F_2, F_3, so definiert man die *Divergenz* von F als

die Funktion $\nabla \cdot F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, die durch

$$\nabla \cdot F(\mathbf{x}) = \frac{\partial F_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3(\mathbf{x})}{\partial x_3}$$

gegeben ist. Ebenso definiert man die *Rotation* $\nabla \times F$ von F durch

$$\nabla \times F(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3(\mathbf{x})}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2(\mathbf{x})}{\partial x_3} \\ \frac{\partial F_1(\mathbf{x})}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3(\mathbf{x})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

.
.
.
.
.

Den Gradienten von f bezeichnet man oft auch mit grad f, die Divergenz von F mit

div F, und die Rotation mit rot F. Formal ist die Rotation $\nabla \times F$ der Ausdruck,

den man erhält, wenn man das Vektorprodukt der Vektoren“

”

$$\begin{pmatrix} \partial \\ \\ \partial x \end{pmatrix} \quad F_1 \quad \begin{pmatrix} 1 \\ \\ \partial \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} F \\ \\ \partial x_2 \end{pmatrix} \quad 2 \quad \partial$$

F 3

∂x 3

bildet. Ebenso kann man die Divergenz $\nabla \cdot F$ als formales Skalarprodukt der obigen

Vektoren ansehen. Schließlich entspricht der Gradient

∇f bis auf Vertauschen

$\begin{pmatrix} \partial \end{pmatrix}$

∂x 1

der Faktoren dem Produkt des Skalars“ f mit dem Vektor $\begin{pmatrix} \partial \end{pmatrix}$. Divergenz,

”

∂x 2

∂

∂x 3

Gradient und Rotation spielen eine wichtige Rolle in der Analysis in drei Variablen.

Die zentralen Aussagen sind dort die Integralsätze von Gauß und Stokes. Hierüber

können Sie sich informieren in Büchern über Vektoranalysis wie etwa [Jänich] Kapitel

10, [Heuser] Kapitel 24,25, [Marsden–Tromba], [Meyberg–Vachenauer] Kapitel 8,

[Burg–Haf–Wille] Kapitel 3.

2.3.2

Die Lorentzkraft

Um die Bewegung eines geladenen Teilchens in einem Magnetfeld zu beschreiben,

ist es günstig, das Vektorprodukt zu verwenden. Es gilt nämlich:

Bewegt sich ein Teilchen der Ladung e mit Geschwindigkeit **v** *in einem Magnetfeld*

B, so ¨

ubt das Magnetfeld auf das Teilchen die Kraft

$F = e \cdot \mathbf{v} \times B$

aus.

Diese Kraft heißt die *Lorentzkraft*. Nach Satz 2.2 impliziert diese Formel unter an-

derem, daß die Lorentzkraft senkrecht auf der Bewegungsrichtung des Teilchens und

senkrecht auf dem Magnetfeld steht. Sei beispielsweise

$\begin{pmatrix}$

0

$B = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$

b

ein konstantes Magnetfeld der Stärke *b* in *x* 3-Richtung. Betrachten wir ein Teilchen,

dessen Orts- und Geschwindigkeitsvektoren zur Zeit 0 in der *x* 1- *x* 2-Ebene liegen.

Nach den Newton’schen Gesetzen ist die Bewegungsgleichung des Teilchens

e

¨

$\mathbf{x} =$

$\cdot \dot{\mathbf{x}} \times B$

m

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

2.3 Ergänzungen zu Kapitel 2

81

Hier bezeichnet m die Masse des Teilchens, $\mathbf{x}(t)$ die Lage des Teilchens, und ˙

$\mathbf{x}(t) =$

$d\,\mathbf{x}(t)$ bzw. ¨

$\mathbf{x}(t) = d\,2$

dt

$dt\,2\,\mathbf{x}(t)$ die Geschwindigkeit bzw. die Beschleunigung zur Zeit t.

Also gilt im vorliegenden Fall

eb

eb

$\ddot{x}_1 =$

$\dot{x}$

$\dot{x}$

m_2

$\ddot{x}_2 = -m_1$

$\ddot{x}_3 = 0$

Unsere Annahme war, daß $x_3(0) = \dot{x}_3(0) = 0$. Also ist $x_3(t) = 0$ für alle Zeit t. Die

allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

eb

$\ddot{x}_1 =$

$\dot{x}$

.

x

m 2

..

x 2 = − eb

m 1

ist

eb

x 1(t) = C 1 + A sin

(t − t

m

0)

eb

x 2(t) = C 2 + A cos

(t − t

m

0)

Man sieht, daß sich das Teilchen auf einer Kreisbahn bewegt. Mit nicht-konstanten

Magnetfeldern kann man natürlich auch interessantere Ablenkungen bewegter gela-

dener Teilchen bewirken, dies geschieht z.B. hunderttausendfach in der Röhre

eines

Fernsehapparates. Die Grundgleichungen der Elektrodynamik, in der die Wechselbe-

ziehungen zwischen elektrischen und magnetischen Feldern studiert werden, sind die

sogenannten Maxwell’schen Gleichungen“. Diese lassen sich am einfachsten in der

”

Sprache der Vektoranalysis, d.h. unter Verwendung des Skalar-und Vektorproduktes

sowie der Operationen Divergenz“, Gradient“ und Rotation“ formulieren (siehe

”

”

”

z.B. [Jackson]).

2.3.3

Infinitesimale Drehungen

Gegeben sei ein Vektor ω der Länge 1 in R3. Für $t \in$ R bezeichne Rt die Drehung um

die von ω aufgespannte Achse R $\cdot$ ω mit Drehwinkel $t \cdot 360 \circ$ im Gegenuhrzeigersinn

2 π

(wenn man von ω aus auf die zu ω senkrechte Achse schaut). Wir interessieren uns

für den Unterschied zwischen $R_t\mathbf{x}$ und $\mathbf{x}$, wenn t infinitesimal klein“ ist. Dieser

”

Unterschied wird durch die t-Ableitung der vektorwertigen Funktion $t \to R_t\mathbf{x}$ an

der Stelle $t = 0$ ausgedrückt.

Lemma 22

d $R_t\mathbf{x}$

$= \omega \times \mathbf{x}$

dt

t=0

Beweis Sei S eine Drehung, die den Vektor ω auf den Vektor (0 , 0 , 1) abbildet. Dann

ist

⎛

⎝

cos 360 ◦ t

− sin360 ◦ t 0

2 π

2 π

R

⎞

⎠

t

$= S - 1 \circ$

$\sin 360 \circ t$

$\cos 360 \circ t$

0

$\circ S$

2π

2π

0

0

1

.

.

.

.

.

.

.

82

2 Skalarprodukt und Vektorprodukt

Folglich ist

$\Big($

$\Big($

$\Big)$

⎝

cos 360 ◦ t

− sin360 ◦ t 0

d

2 π

2 π

R

⎛ d ⎛

⎠

⎠

t**x**

=

S− 1 ◦

sin 360 ◦ t

cos 360 ◦ t

0

◦ S **x**

dt

t=0

dt

2 π

2π

0

0

1

t=0

⎛

⎜

0

− 1 0

=

S− 1 ∘ ⎜ 1

0

0 ⎟ ∘ S **x**

0

0

0

Andererseits ist nach Korollar 20

⎛⎛ ⎜

⎜

0

ω × **x** = S− 1 (($S\omega$) × (S**x**)) = S− 1 ⎜⎜ 0 ⎟ × S**x**⎟

1

Setzen wir **y** = *S***x**, so ist

⎛

⎝ ⎛ ⎝

⎛

⎝

⎛ ⎝ ⎛ ⎝

⎛ ⎝

0

− 1 0

y 1

−*y* 2

0

y 1

0

⎝ 1

0

0 ⎞ ⎝ *y* ⎞

⎝

⎞

⎝ ⎞ ⎝ ⎞

\ /

2

=

y 1

=

0

× y 2

=

0

× $S\mathbf{x}$

0

0

0

y 3

0

1

y 3

1

und daraus folgt die behauptete Formel.

✷

Wir werden das Thema der infinitesimalen Drehungen in Abschnitt 6.2 wieder

aufgreifen.

.

3

Das Parallelenaxiom

Heutzutage ist die gebräuchlichste Methode, Probleme der ebenen Geometrie zu be-

handeln, sie durch Einführung von cartesischen Koordinaten in Probleme der Vekto-

ranalysis zu übersetzen. Das bedeutet, daß man zwei aufeinander senkrecht stehende

Geraden g 1, g 2 in der Ebene wählt, jede dieser Geraden orientiert, und dann einem

Punkt P der Ebene ein Paar (p 1 ,p 2) von reellen Zahlen folgendermaßen zuordnet:

Seien π 1 bzw. π 2 die orthogonalen Projektionen der Ebene auf g 1 bzw. g 2. Dann sei

p 1 bzw. p 2 der orientierte Abstand von π 1(P) bzw. π 2(P) vom Schnittpunkt von g 1

und g 2 (siehe Bild 3.1).

g 2

π 2(P)

P

p 2

π 1(P)

g 1

p_1

Bild 3.1

Auf diese Weise erhält man eine Bijektion Φ zwischen der Ebene und der Menge $\mathbb{R}^2$

aller Paare reeller Zahlen. Sie hat folgende Eigenschaften:

1. Sind P,Q Punkte der Ebene, und ist $\Phi(P) = (p_1, p_2)$, $\Phi(Q) = (q_1, q_2)$, so ist der Abstand zwischen P und Q gleich

$|p_1 - q_1|^2 + |p_2 - q_2|^2$. Dies folgt direkt

aus dem Satz von Pythagoras (siehe Bild 3.2).

2. Sind P,Q,R drei verschiedene Punkte in der Ebene, und ist $\Phi(P) = (p_1, p_2)$,

g_2

Q

$|p_2 - q_2|$

P

q_2

$|p_1 - q_1|$

$p\ 2$

$p\ 1$

$g\ 1$

$q\ 1$

Bild 3.2

$\Phi(\ Q) = (\ q\ 1\ ,q\ 2)$, $\Phi(\ R) = (\ r\ 1\ ,r\ 2)$, so ist der Cosinus des Winkels zwischen P

und R mit Spitze Q gleich

$(\ p\ 1 - q\ 1)(\ r\ 1 - q\ 1) + (\ p\ 2 - q\ 2)(\ r\ 2 - q\ 2)$

$(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{q})$

=

,

$|p$

$\mathbf{p} - \mathbf{q}$

$\mathbf{r} - \mathbf{q}$

$1 - q\ 1\ |\ 2 + |p\ 2 - q\ 2\ |\ 2 \cdot$

$|r\ 1 - q\ 1\ |\ 2 + |r\ 2 - q\ 2\ |\ 2$

denn

$\mathbf{p} - \mathbf{q}$

$\mathbf{p} - \mathbf{q}$

ist der Vektor der Länge 1 in Richtung QP, und

$\mathbf{r} - \mathbf{q}$

$\mathbf{r} - \mathbf{q}$

ist der

Vektor der Länge 1 in Richtung QR.

Mit Hilfe der Bijektion Φ kann man nahezu alle elementaren“ Probleme der ebenen

”

Geometrie in Fragen der linearen Algebra, der Algebra und / oder der Analysis über-

setzen. Beispiele und Verallgemeinerungen hiervon werden wir in Kapitel 4 sehen.

Die eben skizzierte Methode ist recht modern, sie geht im wesentlichen auf R. Des-

cartes (1596-1650) zurück. Ihr *analytisches* Vorgehen steht im Gegensatz zu der *syn-*

thetischen Auffassung der Geometrie, die in der griechischen Philosophie entwickelt

worden ist und 2000 Jahre lang, insbesondere durch Euklid’s *Elemente*, die Art und

Weise, Geometrie zu betreiben, dominiert hat (insbesondere in Europa und Nord-

afrika). Das synthetische Vorgehen ist, grob gesagt, das folgende: Man formuliert

zunächst einige Tatsachen über geometrische Objekte (wie Punkte, Geraden, Win-

kel etc.), die allgemein einsichtig und beweislos anzuerkennnen sind, und folgert aus

ihnen durch rein logisches Schließen neue, im Allgemeinen nicht a priori offensicht-

liche Tatsachen (wie den Satz von Pythagoras oder die Konstruktion eines Dreiecks

mit Zirkel und Lineal, wenn die Längen von zwei Seiten und einer Winkelhalbieren-

den vorgegeben sind).

Wir reproduzieren hier die ersten Seiten von Euklid's *Elementen* in der deutschen

Übersetzung von C.Thaer. In ihnen werden die geometrischen Grundtatsachen, aus

denen alles Andere durch rein logisches Schließen folgt, in einer Reihe von *Definitio-*

nen, *Postulaten* und *Axiomen* aufgeführt.

Definitionen

1. Ein **Punkt** ist, was keine Teile hat,

2. Eine **Linie** breitenlose Länge.

3. Die Enden einer Linie sind Punkte.

4. Eine **gerade Linie (Strecke)** ist eine solche, die zu den Punkten auf ihr gleichmäßig

liegt.

5. Eine **Fl¨**

ache ist, was nur Länge und Breite hat.

6. Die Enden einer Fläche sind Linien.

7. Eine **ebene** Fläche ist eine solche, die zu den geraden Linien auf ihr gleichmäßig liegt.

8. Ein ebener **Winkel** ist die Neigung zweier Linien in einer Ebene gegeneinander, die

einander treffen, ohne einander gerade fortzusetzen.

9. Wenn die den Winkel umfassenden Linien gerade sind, heißt der Winkel **geradlinig**.

10. Wenn eine gerade Linie, auf eine gerade Linie gestellt, einander gleiche Nebenwinkel

bildet, dann ist jeder der beiden gleichen Winkel ein **Rechter**;

und die stehende gerade Linie heißt **senkrecht** zu (**Lot** auf) der, auf der sie steht.

11. **Stumpf** ist ein Winkel, wenn er größer als ein Rechter ist,

12. **Spitz**, wenn kleiner als ein Rechter.

13. Eine **Grenze** ist das, worin etwas endigt.

14. Eine **Figur** ist, was von einer oder mehreren Grenzen umfaßt wird.

15. Ein **Kreis** ist eine ebene, von einer einzigen Linie [die **Umfang (Bogen)** heißt] um-

faßte Figur mit der Eigenschaft, daß alle von einem innerhalb der Figur gelegenen

Punkte bis zur Linie [zum Umfang des Kreises] laufenden Strecken einander gleich

sind;

16. Und **Mittelpunkt** des Kreises heißt dieser Punkt.

17. Ein **Durchmesser** des Kreises ist jede durch den Mittelpunkt gezogene, auf beiden

Seiten vom Kreisumfang begrenzte Strecke;

eine solche hat auch die Eigenschaft, den Kreis zu halbieren.

18. Ein **Halbkreis** ist die vom Durchmesser und dem durch ihn abgeschnittenen Bogen

umfaßte Figur; [und Mittelpunkt ist beim Halbkreise derselbe Punkt wie beim Kreise].

19. **Geradlinige Figuren** sind solche, die von Strecken umfaßt werden,

dreiseitige die von drei,

vierseitige die von vier,

vielseitige die von mehr als vier Strecken umfaßten.

20. Von den dreiseitigen Figuren ist ein **gleichseitiges Dreieck** jede mit drei gleichen

Seiten,

ein **gleichschenkliges** jede mit nur zwei gleichen Seiten,

ein **schiefes** jede mit drei ungleichen Seiten.

21. Weiter ist von den dreiseitigen Figuren ein **rechtwinkliges** Dreieck jede mit einem

rechten Winkel,

ein **stumpfwinkliges** jede mit einem stumpfen Winkel,

ein **spitzwinkliges** jede mit drei spitzen Winkeln.

22. Von den vierseitigen Figuren ist ein **Quadrat** jede, die gleichseitig und rechtwinklig

ist,

ein **l¨**

angliches Rechteck jede, die zwar rechtwinklig

aber nicht gleichseitig ist,

ein **Rhombus** jede, die zwar gleichseitig aber nicht rechtwinklig ist,

ein **Rhomboid** jede, in der die gegenüberliegenden Seiten sowohl als Winkel einander

gleich sind und die dabei weder gleichseitig noch rechtwinklig ist;

die übrigen vierseitigen Figuren sollen **Trapeze** heißen.

23. **Parallel** sind gerade Linien, die in derselben Ebene liegen und dabei, wenn man sie

nach beiden Seiten ins unendliche verlängert, auf keiner einander treffen.

Postulate

Gefordert soll sein:

1. Daß man von jedem Punkt nach jedem Punkt die Strecke ziehen kann,

2. Daß man eine begrenzte gerade Linie zusammenhängend gerade verlängern kann,

3. Daß man mit jedem Mittelpunkt und Abstand den Kreis zeichnen kann,

4. Daß alle rechten Winkel einander gleich sind,

5. Und daß, wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien

bewirkt, daß

innen auf derselben Seite entstehende Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte wer-

den, dann die zwei geraden Linien bei Verlängerung ins unendliche sich treffen auf der

Seite, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind.

Axiome

1. Was demselben gleich ist, ist auch einander gleich.

2. Wenn Gleichem Gleiches hinzugefügt wird, sind die Ganzen gleich

3. Wenn von Gleichem Gleiches weggenommen wird, sind die Reste gleich.

4. Wenn Ungleichem Gleiches hinzugefügt wird, sind die Ganzen ungleich.

5. Die Doppelten von demselben sind einander gleich.

6. Die Halben von demselben sind einander gleich.

7. Was einander deckt, ist einander gleich.

8. Das Ganze ist größer als der Teil.

9. Zwei Strecken umfassen keinen Flächenraum.

Wenn Sie die *Definitionen* durchgehen, sehen Sie, daß mit ihnen nicht beabsichtigt

ist, neue Begriffe zu schaffen. Es sind also nicht Definitionen“ in dem Sinn, wie sie

”

heutzutage allgemein in der Mathematik verwendet werden (wie zum Beispiel die

Definition des Begriffs *Gruppe* in Abschnitt 1.2). Vielmehr sollen die *Definitionen* nur

abgrenzen und beschreiben, was bereits existiert – in der platonischen Philosophie

wird den Ideen (etwa derjenigen des Punktes) ja ein selbständiges Sein zugesprochen.

Die Grenze zwischen *Postulaten* und *Axiomen* ist fließend; schon im Altertum haben

Umstellungen stattgefunden. Der Unterscheidung liegt wohl die Einstellung zugrun-

de, daß ein *Postulat* (Forderung) ein spezieller geometrischer Grundsatz ist, der die

Möglichkeit der Konstruktion eines Gebildes sicherstellen soll, während ein *Axiom*

(allgemein Eingesehenes) ein allgemein logischer Grundsatz ist, den kein Vernünfti-

ger, auch wenn er nichts von Geometrie versteht, bestreiten wird.

Bereits im Altertum wurde kritisiert, daß *Postulat 5* nicht ebenso

allgemein

„

einsichtig“ ist wie die anderen Postulate, Axiome und Definitionen. In etwas mo-

dernerer Sprache formuliert besagt *Postulat 5*, daß, *wenn eine gerade Linie l beim*

”

Schnitt mit zwei geraden Linien g 1 *und g* 2 *bewirkt, daß die innen auf derselben Sei-*

te entstehenden Winkel α 1 *und α* 2 *zusammen kleiner als zwei Rechte werden* (d.h.

α 1 + *α* 2 < 180 ◦) , *dann die zwei geraden Linien g* 1 *,g* 2 *bei Verlängerung ins Unendliche sich treffen auf der Seite, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als*

180 ◦ *sind“* (siehe Bild 3.3).

g 2

α 2

α 1

g 1

l

Bild 3.3

Aus der Kritik entstand die Frage, ob es möglich sei, *Postulat 5* wegzulassen und

es aus den restlichen Axiomen, Postulaten und Definitionen durch rein logisches

Schließen herzuleiten. Es gab bereits in der griechischen Mathematik eine Reihe von

Versuchen, dies zu tun; die Argumente stellten sich aber als fehlerhaft heraus (siehe

z.B. [Greenberg], Kap.5).

Eine Möglichkeit, *Postulat 5* aus den übrigen Axiomen, Postulaten und Definitio-

nen herzuleiten, wäre natürlich, einen Widerspruchsbeweis zu führen. Das heißt, man

nimmt alle Postulate, Axiome und Definitionen außer *Postulat 5* an und zusätzlich

die Negation von *Postulat 5*, und versucht, daraus einen Widerspruch herzuleiten.

Dies wurde unter Anderen von G. Saccheri (1667-1733) oder J. Lambert (1728-1777)

versucht. Sie kamen zu seltsamer und seltsamer anmutenden Folgerungen aus den

Annahmen, aber nie zu einem Widerspruch. Erst Mitte des 19. Jahrhunderts wur-

de deutlich, daß es nicht möglich ist, das *Postulat 5* aus allen übrigen Axiomen,

Postulaten und Definitionen herzuleiten. Man sagt, daß es *unabh*¨

angig von den an-

deren Aussagen ist. Ziel dieses Kapitels ist es, die Unabhängigkeit von *Postulat 5* zu

beweisen.

3.1

Axiome der Euklidischen Geometrie

Wir haben bereits oben diskutiert, daß das System von Definitionen, Postulaten

und Axiomen in Euklid’s *Elementen* den modernen Anforderungen an mathemati-

sche Präzision nicht genügt. So wurden denn auch in einigen Beweisen Eigenschaften

der Relation zwischen“ verwendet, die vorher nirgendwo formuliert waren ([Golos],

”

S.57). Dieser Mangel an Präzision erschwert eine Diskussion über Abhängigkeit und

Unabhängigkeit von Axiomen zusätzlich. Deshalb wollen wir zunächst eine präzise

Formulierung der euklidischen Axiome für die Ebene geben, die nur auf der Spra-

che der Mengenlehre basiert und die es (im Prinzip) erlaubt, von der geometrischen

Anschauung völlig zu abstrahieren. Die Objekte, von denen in den Axiomen die

Rede sein wird, werden wohl Punkte“, Geraden“ etc. genannt, sie sind aber nur

”

”

Elemente weiter nicht spezifizierter Mengen. Alle Beweise, die danach durchgeführt

werden, beruhen nur auf den in den Axiomen aufgelisteten Beziehungen zwischen

diesen Objekten. Um die Korrektheit der Schlüsse nachzuprüfen, kann man (und soll-

te vielleicht sogar) auf die geometrische Anschauung verzichten. Wie David Hilbert,

der als erster eine derartig radikale Axiomatisierung der Geometrie

vorgenommen

hat, einmal gesagt haben soll, muß man jederzeit an Stelle von Punkten“, Gera-

”

”

den“, Ebenen“ auch Tische“, Stühle“, Bierseidel“ sagen können ([Blumenthal],

”

”

”

”

S.403). David Hilbert hat in seinem Buch *Grundlagen der Geometrie* ein solches

Axiomensystem angegeben und die Herleitung der üblichen Sätze der euklidischen

Geometrie durchgeführt. Hilbert’s Axiome betreffen, wie die Axiome von Euklid,

die Geometrie im *Raum*. Wir wollen uns hier auf *ebene* Geometrie beschränken und

verwenden deshalb eine Modifikation des Hilbert’schen Axiomensystems, die dem

Buch von [Greenberg] entnommen ist.

Um die Axiomatik für euklidische Geometrie präziser zu formulieren, werden wir

eine Definition der folgenden Form geben: *Eine euklidische Ebene besteht aus einer*

Menge E, einem System G von Teilmengen von E, . . . , die folgende

Eigenschaften

(Axiome) erf¨

ullen . . . , und dann eine Reihe von Beziehungen zwischen Elementen

der Menge *E*, der Menge *G* etc. angeben. Wir könnten das jetzt sofort tun, wollen

aber – zur Motivation – die einzelnen Teile der Definition und die geometrische

Vorstellung, die man mit ihnen verbinden kann (aber nicht muß), vorher diskutieren.

E soll die Menge der Punkte der Ebene repräsentieren. Wir werden deshalb Ele-

mente von *E* auch Punkte“ nennen (wie gesagt, im Prinzip könnten wir auch verein-

”

baren, sie Tische“ zu nennen). Die Elemente des Systems *G* sind Teilmengen von *E*,

”

die wir Geraden“ nennen. Als weiteren Aspekt der Definition werden wir die Vor-

”

stellung aufnehmen, daß auf einer Geraden ein Punkt *zwischen* zwei andern liegen

kann oder nicht. Dies geschieht dadurch, daß wir als weiteren konstituierenden Teil

.

.

3.1 Axiome der Euklidischen Geometrie

einer euklidischen Ebene eine Teilmenge Z von $E \times E \times E$ nehmen, mit der geometri-

schen Vorstellung, daß $(P,Q,R) \in Z$ genau dann, wenn Q auf der Geraden durch P

und R *zwischen* P und R liegt. Die Kongruenz von *Strecken* formalisieren wir durch

die Angabe einer Äquivalenzrelation $\sim$

$=$ auf der Menge $E \times E$. Statt $(P,Q) \sim$

$= (P,Q)$

werden wir auch $PQ \sim$

$= PQ$ schreiben und sagen, daß die Strecken PQ und PQ

kongruent sind. 1 Schließlich nehmen wir noch den Begriff der Kongruenz von *Win-*

keln in die Definition auf. Dies geschieht durch Angabe einer Äquivalenzrelation

auf der Menge $\{(P,Q,R) \in E \times E \times E \mid$ es gibt keine Gerade g mit $P,Q,R \in g\}$. Statt

(P,Q,R)

(P,Q,R) schreiben wir auch

PQR

PQR und sagen, die *Winkel*

PQR und

PQR seien *kongruent*.

Nach diesen Vorbemerkungen und Einführungen von Sprechweisen kommen wir nun zur Definition.

Definition 23 *Eine* euklidische Ebene *ist ein 5-Tupel* ($E,G,Z, \sim$

$=$,

) , *bestehend*

aus einer Menge E, einem nicht leeren System G von Teilmengen von E, einer

Teilmenge Z von $E \times E \times E$, *einer* ¨

Aquivalenzrelation $\sim$

$=$ *auf* $E \times E$ *und einer* ¨

Aqui-

valenzrelation

auf $\{E \times E \times E \mid$ *es gibt kein* $g \in G$ *mit* $P,Q,R \in g\}$, *die zusammen*

die unten aufgef¨

uhrten Eigenschaften (Axiome) (I 1..3), (L1..4), (K1..6), (S1,2) und

(P) erf¨

ullen.

Wir geben nun die Axiome an, und zwar in einzelnen Gruppen, die die verschie-

denen Daten betreffen. Um die Notation zu vereinfachen, führen wir ab und zu neue

Sprechweisen ein, die aber nur unter Verwendung der obigen Daten definiert werden.

Sind z.B. $P \in E$, $g \in G$, so sagen wir, die Gerade g gehe durch den Punkt P“,

falls

”

$P \in g$.

Inzidenzaxiome *(Axiome der Verkn¨*

upfung)

(I 1) *Durch je zwei verschiedene Punkte geht genau eine Gerade.*

(I 2) *Jede Gerade enth¨*

alt mindestens zwei voneinander verschiedene Punkte.

(I 3) *Es gibt drei Punkte, die nicht alle auf einer Geraden liegen.*

Um klar zu machen, daß wir in diesen Axiomen nur Begriffe aus dem 5-Tupel

$(E,G,Z, \sim$

$= ,$

) verwendet haben, schreiben wir die Axiome noch einmal mit Quan-

toren in der formalen Sprache der Logik und Mengenlehre:

(I 1’) $\forall P,Q \in E : [P = Q = \Rightarrow (\exists! \, g \in G : P \in g \wedge Q \in g)]$

(I 2’) $\forall g \in G \; \exists P,Q \in g : P = Q$

(I 3’) $\exists P,Q,R \in E : [\forall g \in G : (P,Q \in g = \Rightarrow R /$

$\in g)]$

1 Man beachte, daß man eine Äquivalenzrelation auf einer Menge M als eine Teilmenge R von

$M \times M$ auffassen kann, sodaß für alle $x,y,z \in M$ gilt: (i) $(x,x) \in R$, (ii) $(x,y) \in R = \Rightarrow (y,x) \in R$

und (iii) $(x,y) \in R$ und $(y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$.

90

3 Das Parallelenaxiom

Axiome der Lage *(Anordnungsaxiome)*

(L1) *Liegt ein Punkt Q zwischen zwei Punkten P und R, so liegen P , Q und R auf*

einer Geraden, sind paarweise verschieden, und Q liegt auch zwischen R und

P .

(L2) *Sind P und Q zwei verschiedene Punkte, und ist g die nach (I 1) eindeutige*

Gerade durch P und Q, so gibt es Punkte A, B, C auf g, so daß P zwischen

A und B, B zwischen P und Q, und Q zwischen B und C liegt.

C

Q

g

B

P

A

(L3) *Unter drei verschiedenen Punkten P , Q, R auf einer Geraden gibt es genau*

einen, der zwischen den beiden anderen liegt.

Axiom (L3) schließt z.B. *kreisf*¨

ormige Geraden aus.

P

Q

R

Bevor wir Axiom (L4) formulieren, führen wir folgende Sprechweise ein: Ist $g \in G$

und sind $P,Q \in E$ mit $P \notin$

$\in g$, $Q \notin g$, so sagen wir, daß *P* und *Q* auf derselben Seite

von *g* liegen, falls es keinen Punkt *X* von *g* gibt, so daß *X* zwischen *P* und *Q* liegt.

P

g

X

Q

(L4a) *Ist $g \in G$, und liegen von drei Punkten P , Q, R sowohl P und Q als auch Q*

und R auf derselben Seite von g, so liegen auch P und R auf derselben Seite

von g.

(L4b) *Ist $g \in G$, und liegen von drei Punkten P , Q, R weder P und Q noch Q und*

R auf derselben Seite von g, so liegen P und R auf derselben Seite von g.

Wieder führen wir jetzt eine Sprechweise ein: Sind P und Q verschiedene Punkte,

so gibt es nach Axiom (I 1) genau eine Gerade durch P und Q. Der *Strahl* $S(P,Q)$

von P aus in Richtung Q sei die Menge aller Punkte X auf g, die entweder gleich P

oder Q sind, oder zwischen P und Q liegen, oder für die Q zwischen P und X liegt.

In Formeln:

$S(P,Q) := \{X \in g \mid X = P$ oder $X = Q$ oder $(P,X,Q) \in Z$ oder$(P,Q,X) \in Z\}$

Q

P

Kongruenzaxiome

(K1) *Sind P , Q, P und R Punkte mit R = P , so gibt es genau einen Punkt Q*

auf dem Strahl S(P ,R) so daß die Strecken P Q und P Q kongruent sind.

Q

R

Q

P

P

(K2) *F¨*

ur je zwei Punkte P und Q gilt P Q ∼

= QP .

(K3) *Liegen von sechs Punkten P , Q, R und P , Q , R der Punkt Q zwischen*

P und R und der Punkt Q zwischen P

und R und ist P Q ∼

= P Q und

QR ∼

= Q R , so ist auch P R ∼

= P R .

P

R

Q

Q

R

P

.

(K4) *F¨*

ur drei Punkte P , Q, R, die nicht auf einer Geraden liegen, gilt

P QR

RQP . Ferner gilt

P QR

P QR f¨

ur irgend zwei von Q verschiedene

Punkte P ∈ S(Q,P) und R ∈ S(Q,R) .

P

P

Q

R

R

(K5) *Sind P , Q, R, X, P = Q Punkte aus E, so daß die Punkte P , Q, R nicht*

auf einer Geraden liegen und X nicht auf der Geraden durch P und Q liegt,

so gibt es genau einen von Q ausgehenden Strahl S, so daß f¨

ur alle Punkte

R von S, die von Q verschieden sind,

P QR

P Q R ist und R auf

derselben Seite der Geraden durch P und Q liegt wie X.

P

S

R

X

Q

Q

R

P

(K6) *Sind P , Q, R, P , Q , R Punkte aus E, so daß weder P , Q und R noch*

P , Q und R auf einer Geraden liegen, und gilt P Q ∼

= P Q , QR ∼

= Q R

und

P QR

P Q R , so gilt auch P R ∼

= P R ,

QP R

Q P R und

QRP

Q R P .

.

R

R

P

Q

P

Q

In der geometrischen Umgangssprache bedeutet (K1), daß sich eine vorgegebene

Strecke auf einem vorgegebenen Strahl in eindeutiger Weise abtragen läßt. (K4)

besagt, daß ein Winkel durch die ausgehenden Strahlen bis auf Kongruenz bestimmt

ist. (K5) bedeutet, daß man einen vorgegebenen Winkel an einem vorgegebenen

Strahl auf jeder Seite eindeutig abtragen kann. Schließlich besagt (K6), daß zwei

Dreiecke kongruent sind, wenn zwei Seiten und der jeweils eingeschlossene Winkel

kongruent sind.

Axiom (K6) wird bei Euklid als Lehrsatz formuliert und aus den Definitionen,

Postulaten und Axiomen hergeleitet. Es ist instruktiv, sich den Beweis“ genauer

”

anzusehen. Es folgt die entsprechende Passage aus der Übersetzung von C. Thaer:

§ 4 (L. 1)

Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten zwei Seiten entsprechend gleich sind und die von den

gleichen Strecken umfaßten Winkel einander gleich, dann muß in ihnen auch die Grundli-

nie der Grundlinie gleich sein, das Dreieck muß dem Dreieck gleich sein, und die ¨

ubrigen

Winkel m¨

ussen den ¨

ubrigen Winkeln entsprechend gleich sein, n¨

amlich immer die, denen

gleiche Seiten gegen¨

uberliegen.

ABC, DEF seien zwei Dreiecke, in denen zwei Seiten *AB, AC* zwei Seiten *DE, DF* ent-

sprechend gleich sind, nämlich *AB* = *DE* und *AC* = *DF* , ferner

BAC =

EDF . Ich

behaupte, daß auch Grdl. *BC* = Grdl. *EF* , ferner

ABC =

DEF und die übrigen Win-

kel den übrigen Winkeln entsprechend gleich sein müssen, immer die, denen gleiche Seiten

gegenüberliegen, *ABC* = *DEF* und *ACB* = *DF E*.

Deckt man nämlich

ABC auf

DEF und legt dabei Punkt *A* auf Punkt *D* sowie die

gerade Linie *AB* auf *DE*, so muß auch Punkt *B E* decken, weil *AB* = *DE*; da so

AB DE

deckt, muß auch die gerade Linie *AC DF* decken, weil

BAC = *EDF* ; daher muß auch

Punkt *C* Punkt *F* decken, weil gleichfalls *AC* = *DF* . *B* deckte aber *E*; folglich muß die Grundlinie *BC* die Grundlinie *EF* decken [denn würde, während *B E* und *C F* deckt, die

Grundlinie *BC*

EF nicht decken, so würden zwei Strecken einen Flächenraum umfassen;

das ist aber unmöglich (Ax. 9). Also muß die Grundlinie *BC EF* decken] und ihr gleich sein

(Ax. 7); folglich muß auch das ganze Dreieck *ABC* das ganze Dreieck *DEF* decken und ihm

gleich sein, auch müssen die übrigen Winkel die übrigen Winkel decken und ihnen gleich

sein, *ABC* = *DEF* und *ACB* = *DF E*.

Wenn also in zwei Dreiecken zwei Seiten zwei Seiten entsprechend gleich sind und die von

den gleichen Strecken umfaßten Winkel einander gleich, dann muß in ihnen auch die Grund-

linie der Grundlinie gleich sein, das Dreieck muß dem Dreieck gleich sein, und die übrigen

Winkel müssen den übrigen Winkeln entsprechend gleich sein, nämlich immer die, denen

gleiche Winkel gegenüberliegen - dies hatte man beweisen sollen.

3 Das Parallelenaxiom

Der zweite Abschnitt des Beweises beginnt mit Deckt man nämlich das Dreieck

„

ABC auf das Dreieck

DEF“. Es wird also auf Bewegungen oder *Isometrien*

der Ebene Bezug genommen – etwas, von dem vorher weder in den Definitionen,

Postulaten und Axiomen noch in den vorhergehenden Überlegungen die Rede war.

Hier wird also auf die Anschauung Bezug genommen. Dies wollen wir unbedingt

vermeiden; und deshalb ist (K6) hier ein Axiom.

Stetigkeitsaxiome

(S1) *Sind P , Q, P , Q Punkte, sodaß P = Q, P = Q , so gibt es eine nat¨*

urliche

Zahl n und Punkte R 1 *,...,Rn* ∈ *S*(*P ,Q*) *, so daß*

1. f¨

ur j = 1 *,...,n* − 1 *der Punkt Rj zwischen P und Q liegt oder gleich Q*

ist,

2. Q zwischen P und Rn liegt,

3. die Strecken P R 1 *und Rj*− 1 *Rj*

(2 ≤ *j* ≤ *n*) *alle zur Strecke P Q kon-*

gruent sind.

Q

R

Q

R 5

R

R

4

3

P

R 1

2

P

(S2) *Ist eine Gerade g disjunkte Vereinigung zweier nichtleerer Teilmengen* Σ1 *und*

Σ2 *von g, sodaß kein Punkt von* Σ1 *zwischen zwei Punkten von* Σ2 *liegt, und*

umgekehrt, so gibt es genau einen Punkt Q auf g, so daß f¨

ur alle Punkte

P ∈ Σ1 , *R* ∈ Σ2 , *die von Q verschieden sind, der Punkt Q zwischen P und R*

liegt.

Das Axiom (S1) besagt in der Umgangssprache, daß man, wenn man die Strek-

ke PQ genügend oft auf dem Strahl $S(P, Q)$ abträgt, schließlich über den Punkt

Q hinauskommt. (S1) nennt man auch das *Archimedische Axiom* und (S2) das

Dedekind'sche Axiom. Diese beiden Axiome sind sehr ähnlich zu den Axiomen, die

man bei einer Charakterisierung des Körpers R der reellen Zahlen verwendet, um

zu sagen, daß R *archimedisch angeordnet* bzw. *vollständig* ist (vgl. [Forster] 1, § 3).

Schließlich kommen wir zu dem Axiom, um das sich die Diskussion hauptsächlich

dreht.

Parallelenaxiom

(P) *Ist g eine Gerade und P ein Punkt, der nicht auf dieser Geraden liegt, so gibt*

es h¨

ochstens eine *Gerade g durch P mit* $g \cap g = \emptyset$.

.

Definieren wir zwei Geraden g, g als *parallel*, wenn $g = g$ oder

$g \cap g = \emptyset$, so besagt (P), daß es zu einer Geraden g durch einen Punkt P /

$\in g$

höchstens eine Parallele gibt.

Damit ist unsere Definition einer *euklidischen Ebene* beendet. Man kann sich

überlegen, daß die obigen Axiome denselben mathematischen Sachverhalt beschrei-

ben wie Euklid’s Axiome für die Ebene, und daß das Weglassen von Axiom (P) dem

Weglassen des *Postulates 5* entspricht. *Postulat 5* und Axiom (P) sagen wirklich na-

hezu dasselbe aus: Sei g eine Gerade und P ein Punkt, der nicht auf g liegt. Wähle

eine Gerade l durch P , einen Punkt $Q \in g$ und einen Punkt $X \in g$, der nicht auf l

liegt. Für eine Gerade g durch P gibt es dann drei Möglichkeiten: Ist Y ein Punkt

von g , der auf derselben Seite von l liegt wie X, so können sich

XQP und

$QP\ Y$

zu einem Winkel ergänzen, der kleiner, gleich, oder größer als $180\circ$ ist (siehe Bild

3.14).

P

Y

g

Q

X

g

l

Bild 3.14

..

Ubung: Formulieren Sie in Begriffen der obigen Definition der euklidischen Ebene“,

”

was es heißt, daß sich zwei Winkel zu einem Winkel ergänzen, der kleiner (bzw.

gleich) 180 ◦ ist!

Im ersten (und auch im dritten) Fall fordert *Postulat 5*, daß sich *g* und *g* schneiden.

Das heißt, *g* und *g* können sich nur dann nicht schneiden, wenn sich die obigen

Winkel zu 180 ◦ ergänzen. Diese Bedingung, daß sich die Winkel zu 180 ◦ ergänzen,

bestimmt *g* eindeutig. Also impliziert *Postulat 5*, daß es höchstens eine Parallele zu

g durch *P* gibt, und damit das Axiom (P). Umgekehrt kann man zeigen, daß auch

(P) das *Postulat 5* impliziert (unter Verwendung der anderen Definitionen, Postulate

und Axiome).

Ausgehend von der obigen Definition einer euklidischen Ebene“ kann man nun

”

eine große Menge von Sätzen beweisen, die in jeder

euklidischen Ebene“ gelten;

”

genauso wie wir in Kapitel 1 Sätze bewiesen haben, die in jeder Gruppe gelten. Man

kommt dabei zu sämtlichen bekannten Sätzen aus der elementaren Geometrie (siehe

.

.

.

.

z.B. [Greenberg], [Hilbert]). Das wollen wir hier nicht tun, sondern die Diskussion

des Parallelenaxioms fortführen.

Wenn immer ein Axiomensystem vorliegt, stellen sich die folgenden Fragen:

Unabh¨

angigkeit: Waren alle Axiome nötig, oder ist es möglich, ein Axiom (oder

einen Teil davon) wegzulassen und seine Aussagen aus den übrigen Axiomen

herzuleiten?

Das ist genau die Frage, die wir für das Parallelenaxiom stellen. Konkret lautet

die Frage: Kann man zeigen, daß in jedem System ($E, G, Z, \sim$

$=$,

), in dem die

Axiome (I 1..3), (L1..4), (K1..6), (S1,2) gelten, auch (P) gilt? Das würde bedeu-

ten, daß man das Parallelenaxiom aus den anderen Axiomen herleiten kann.

Wie gesagt, ist die Antwort Nein“. Wir werden dies im nächsten Abschnitt

”

begründen.

Widerspruchsfreiheit: Führen die Axiome – eventuell nach einer langen Kette logischen Schließens – zu einem Widerspruch? Im obigen Fall würde das implizieren, daß es keine euklidische Ebene“, so wie wir sie definiert haben, gibt.

”

Eindeutigkeit: Sind alle Systeme, die diese Axiome erfüllen,

im Wesentlichen“

”

gleich? Diese Frage ist keine ganz präzise Frage. Im Beispiel des Axiomensystems für Gruppen liegt sicher keine Eindeutigkeit vor, wir haben ja viele wesentlich verschiedene Beispiele von Gruppen gesehen. Im Fall von euklidi-

”

schen Ebenen“ liegt Eindeutigkeit vor, wie wir unten (Satz 3.2) sehen werden.

Wenden wir uns zunächst der Frage der Widerspruchsfreiheit der Axiome der euklidischen Ebene zu. Sicher sind die Axiome widerspruchsfrei, wenn wir ein Beispiel

einer euklidischen Ebene“ angeben können. Mit Hilfe der reellen Zahlen läßt sich

”

ein naheliegendes Beispiel konstruieren. Sind $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$

∈ R2, so bezeichnen wir das *Skalarprodukt* von **x** und **y** mit **x** · **y** := x 1 y 1 + x 2 y 2 und die L¨

ange von **x** mit **x** :=

x 2 + x 2.

1

2

Satz 3.1 *Es sei* E := R2 , G *das System der Teilmengen von* E = R2 *der Form*

{(x 1 ,x 2) ∈ R2 | ax 1 + bx 2 = c}, *wobei* a,b,c ∈ R , a 2 + b 2 = 0 , Z := {(**x** , **y** , **z**) ∈

E × E × E | **x** = **z** *und* **y** = **x** + t(**z** − **x**) *für eine reelle Zahl* t *mit* 0 < t < 1 }, ∼

= *die*

¨

Aquivalenzrelation auf E × E, *definiert durch*

(**x** , **y**) ∼

= (**x** , **y**) ⇐⇒

x − **y** = **x** − **y** ,

die ¨

Aquivalenzrelation auf {(**x** , **y** , **z**) ∈ E × E × E | ∀g ∈ G : **x** , **y** ∈ g = ⇒ **z** /

∈ g},

definiert durch

(**x** − **y**) · (**z** − **y**)

(**x** , **y** , **z**)

$(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \Longleftrightarrow (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{z} - \mathbf{y}) =$

.

$\mathbf{x} - \mathbf{y}$

$\mathbf{z} - \mathbf{y}$

$\mathbf{x} - \mathbf{y}$

$\mathbf{z} - \mathbf{y}$

Dann ist das 5-Tupel (*E,G,Z,* ∼

= ,

) *eine*

euklidische Ebene“, d.h. es erf¨

ullt die

”

Axiome (I1..3), (L1..4), (K1..6), (S1,2), (P) .

.

3.1 Axiome der Euklidischen Geometrie

97

Den Beweis des Satzes überlassen wir den LeserInnen als Übung. Wie oben gesagt,

impliziert Satz 3.1, daß die Axiome einer euklidischen Ebene widerspruchsfrei sind,

wenn nur die Axiome für die reellen Zahlen widerspruchsfrei sind. Schwieriger zu

beweisen ist der folgende

Satz 3.2 *Seien* ($E,G,Z, \sim$

$=$,

) *und* (E ,G ,Z , $\sim$

$=$,

)

euklidische Ebenen“.

”

Dann gibt es eine Bijektion. $F : E \longrightarrow E$ *mit* $F(g) \in G$ *für alle* $g \in G$, $F^{-1}(g) \in G$

$f^{\cdot}$

ur alle $g \in G$, *sodaß für alle* $P,Q,R,\hat{}$

P , $\hat{}$

$Q,\hat{}$

$R \in E$ *gilt:*

$(P,Q,R) \in Z$

$\Longleftrightarrow (F(P),F(Q),F(R)) \in Z$

$P\ Q \sim$

$=\hat{}$

$P\hat{}$

Q

$\Longleftrightarrow F(P)\ F(Q) \sim$

$= F (\hat{}$

$P) F (\hat{}$

$Q)$

$P QR$

$\hat{}$

$P \hat{}$

$Q \hat{}$

R

$\Longleftrightarrow$

$F (P) F (Q) F (R)$

$F (\hat{}$

$P) F (\hat{}$

$Q) F (\hat{}$

$R)$

Satz 3.2 besagt, daß das in Satz 3.1 gegebene Beispiel bis auf Isomorphie“ das

”

einzige Beispiel einer euklidischen Ebene ist. Für einen Beweis von Satz 3.2 siehe

z.B. [Efimow].

Aus diesen beiden Sätzen folgt, daß jede Aussage, die man aus den Axiomen einer

euklidischen Ebene herleiten kann, auch in R2 gilt – und umgekehrt. Man kann

also

die euklidische Geometrie auf zwei Weisen betreiben: *Synthetisch*, d.h., indem man

Sätze aus den Axiomen herleitet, oder *analytisch*, indem man unter anderem mit

Methoden der Vektoranalysis oder der Zahlentheorie Sätze über R2 beweist, die eine

geometrische Natur haben. Natürlich ist in diesem Zusammenhang ein Satz über R2

nicht dann interessant, wenn die entsprechenden Formeln ein schönes Druckbild er-

geben, sondern wenn sie einen interessanten geometrischen Sachverhalt beschreiben.

Satz 3.1 und Satz 3.2 besagen, daß die synthetische und die analytische Vorgehens-

weise völlig äquivalent sind. Es ist im Prinzip nur eine Geschmacksfrage, welche man

vorzieht. Der synthetische Ansatz hat den Vorteil, geometrischer und anschaulicher

zu sein (siehe z.B. [Kunz]). Beim analytischen Vorgehen sind viele Beweise von glei-

cher Struktur – nämlich Rechnen mit Koordinaten. In den Kapiteln 4, 5 und 6 gehen

wir aus diesem Grund auch meist analytisch vor.

Die Vorteile der analytischen Methode haben sich insbesondere bei Unmöglich-

keitsbeweisen für Konstruktionen in der euklidischen Ebene gezeigt. Will man bei-

spielsweise beweisen, daß es nicht möglich ist, durch Konstruktion mit Zirkel und

Lineal einen allgemeinen Winkel in drei gleiche Teile zu teilen, so geht man folgen-

dermaßen vor: In der Ebene R2 sei ein Winkel gegeben, d.h. zwei Strahlen S 1, S 2

durch einen Punkt Q. Mit dem Zirkel schlage man einen Kreis K mit beliebigem

Radius $r > 0$ um Q. P 1 bzw. P 2 bezeichne den Schnittpunkt von K mit S 1 re-

sp. S 2. Die Koordinaten von Q,P 1 ,P 2 sind gewisse reelle Zahlen. Nun überlegt man

sich, welche Typen von reellen Zahlen als Koordinaten von Punkten auftreten, die

man aus Q,P 1 ,P 2 durch Konstruktion mit Zirkel und Lineal erhält. Die Menge der

so entstehenden Zahlen ist eine echte Teilmenge von R – wir bezeichnen sie mit

M (Q,P 1 ,P 2). Es sei nun R der Punkt auf K, für den der Winkel P 1 QR ein Drittel des Winkels

P 1 QP 2 ist (siehe Bild 3.15).

Falls man den Winkel

P 1 QR mit Zirkel und Lineal dreiteilen kann, liegen die Ko-

ordinaten von R in M (Q,P 1 ,P 2). Man kann aber zeigen – und das ist der schwierige

Teil des Beweises –, daß für allgemeine Wahl der Strahlen S 1 und S 2 dies nicht

P 2

R

Q

P 1

Bild 3.15

der Fall ist (siehe z. B. [Moise], Ch. 19 oder [Artin], Kap. 13.4). Somit ist es also

unmöglich, einen allgemeinen Winkel mit Zirkel und Lineal in drei gleiche Teile zu

teilen.2

Natürlich wäre es im Prinzip auch möglich, einen derartigen Beweis synthetisch

zu führen; das würde aber sehr unübersichtlich.

..

Ubung: i) Gegeben sei eine vierelementige Menge *E*, ferner bezeichne *G* die Menge

aller zweielementigen Teilmengen von *E*. Zeigen Sie, daß für das Paar (*E*,*G*) die

Axiome (I1), (I2), (I3) und das Parallelenaxiom (P) erfüllt sind!

ii) Konstruieren Sie eine Menge *G* von Teilmengen einer neunelementigen Menge

E, so daß die obigen Axiome erfüllt sind!

..

Ubung: Formulieren Sie (L1...4) in der Sprache der Mengenlehre und der formalen

Logik! Es ist vielleicht nützlich, eine Abkürzung für die Sprechweise P , Q liegen

”

auf derselben Seite von g“ einzuführen.

..

Ubung: Ist das in Abschnitt 1.2 angegebene Axiomensystem für Gruppen unabhängig?

3.2

Das Poincar´

e-Modell der hyperbolischen Ebene

Wir kehren zu der Frage der Unabhängigkeit des Parallelenaxioms zurück. Um zu

beweisen, daß es von den anderen Axiomen unabhängig ist, genügt es, ein Beispiel ei-

nes 5-Tupels ($E,G,Z, \sim$

$=$,

) anzugeben, in dem die Axiome (I 1..3), (L1..4), (K1..6),

2 genauer: Es gibt eine dichte Teilmenge M im Intervall $[0\circ , 360\circ]$, so daß nur die Winkel α aus

$[0\circ , 360\circ] \setminus M$ mit Zirkel und Lineal in drei gleiche Teile geteilt werden können.

.

(S1,2) alle gelten, die Aussage (P) aber nicht. Wäre es nämlich möglich, das Paral-

lelenaxiom aus den anderen Axiomen durch rein logisches Schließen herzuleiten, so

würden all diese Schlüsse auch auf das System ($E,G,Z, \sim$

$=$,

) des Beispiels zutref-

fen, und (P) würde auch in diesem Beispiel gelten. Ein Modell einer Geometrie, in

dem alle Axiome bis auf das Parallelenaxiom gelten, wurde zuerst von E. Beltrami

1868 angegeben. Wir beschreiben hier ein

isomorphes“ Modell, das H. Poincaré

”

zugeschrieben wird. Wir werden also jetzt eine Punktmenge E, ein System G von

Teilmengen von E etc. angeben, und dann nachprüfen, daß die Axiome (I 1..3),

(L1..4), (K1..6), (S1,2) erfüllt sind, (P) aber nicht.

Als Punktmenge nehmen wir die *obere Halbebene*

$H := \{z \in \mathrm{C} \mid \mathrm{Im}\, z > 0\}$

Erinnern Sie sich, daß jede komplexe Zahl z auf eindeutige Weise in der Form

$z = x + iy$ mit $x,y \in \mathrm{R}$ geschrieben werden kann. x heißt der *Realteil* Re z von z, und y der *Imagin*¨

arteil Im z. Das Systen G von Teilmengen von H besteht aus

zwei Teilen: Als erstes nehmen wir *Halbgeraden*, die senkrecht auf der reellen Achse

stehen. Genauer: G 1 sei das System der Mengen

$g\alpha := \{z \in H \mid \mathrm{Re}\, z = \alpha\}$,

wobei $\alpha \in \mathrm{R}$ eine beliebige reelle Zahl ist (siehe Bild 3.16).

Im z

H

$g\alpha$

Re z

α

Bild 3.16

Als zweites nehmen wir *Halbkreise* in H mit Mittelpunkt auf der reellen Achse.

Genauer: G 2 sei das System der Mengen

$gx,r :=$

$z \in H \; |z - x| = r$

,

wobei x über alle reellen, r über alle positiven reellen Zahlen läuft (siehe Bild 3.17).

Wir setzen

Im z

H

gx,r

x

Re z

r

Bild 3.17

$G := G_1 \cup G_2$

Damit haben wir die ersten beiden Daten eines 5-Tupels definiert, von dem wir zeigen

wollen, daß alle Axiome einer

euklidischen Ebene“ bis auf das Parallelenaxiom

”

erfüllt sind. In den Inzidenzaxiomen (I 1..3) kommen nur Elemente von E und G

vor, und dasselbe gilt für das Parallelenaxiom (P). Wir können also schon jetzt

nachprüfen, daß H und G die Axiome (I 1..3) erfüllen, aber nicht (P). Um Axiom (I 1)

nachzuprüfen, müssen wir zeigen, daß es für je zwei verschiedene Punkte $z_1, z_2 \in H$

genau ein $g \in G$ gibt, so daß sowohl z_1 als auch z_2 auf g liegen. Dazu machen wir

eine Fallunterscheidung:

1. Fall

Re z 1 = *Re* z 2: In diesem Fall gibt es genau ein $g \in G$ 1, das sowohl z 1

als auch z 2 enthält, nämlich $\{z \in H \mid \text{Re } z = \text{Re } z\ 1\}$. Ferner gibt es kein $g \in G$ 2, so daß z 1 ,z 2 $\in g$. Gäbe es nämlich ein solches g , so gäbe es ein $x \in$ R, so daß

$|z\ 1 - x|\ 2 = |z\ 2 - x|\ 2$, d.h.

$(\text{Re } z\ 1 - x)2 + (\text{Im } z\ 1)2 = (\text{Re } z\ 2 - x)2 + (\text{Im } z\ 2)2$

Da Re z 1 = Re z 2 und Im z 1 , Im z 2 > 0, impliziert diese Gleichung Im z 1 = Im z 2, und somit ist z 1 = z 2. Wir waren aber davon ausgegangen, daß z 1 = z 2. Natürlich

ist es auch anschaulich klar, daß es keinen Halbkreis mit Mittelpunkt auf der reellen

Achse gibt, der sowohl z 1 als auch z 2 enthält (siehe Bild 3.18).

2. Fall

Re z 1 = *Re* z 2: In diesem Fall gibt es natürlich kein Element von G 1, das

sowohl z 1 als auch z 2 enthält. Sei nun

$g =$

$z \in H\ |z - x| = r\ ,x \in \text{R}\ ,r > 0$

ein Element von G 2. Dann gilt:

$z\ 1\ ,z\ 2 \in g \Longleftrightarrow r\ 2 = |z\ 1 - x|\ 2 = |z\ 2 - x|\ 2$

.

.

3.2 Das Poincaré-Modell der hyperbolischen Ebene

101

Im z

z 2

z 1

Re z

x

Bild 3.18

Die letzte Gleichung formen wir um:

$$(\operatorname{Re} z_1 - x)^2 + (\operatorname{Im} z_1)^2 = (\operatorname{Re} z_2 - x)^2 + (\operatorname{Im} z_2)^2$$

$$(\operatorname{Re} z_1)^2 - 2x \operatorname{Re} z_1 + x^2 + (\operatorname{Im} z_1)^2 = (\operatorname{Re} z_2)^2 - 2x \operatorname{Re} z_2 + x^2 + (\operatorname{Im} z_2)^2$$

Dies ergibt

$$(\operatorname{Re} z_1)^2 + (\operatorname{Im} z_1)^2 - (\operatorname{Re} z_2)^2 - (\operatorname{Im} z_2)^2 = 2x(\operatorname{Re} z_1 - \operatorname{Re} z_2) \text{ oder}$$

$$x = \frac{|z_1|^2 - |z_2|^2}{2(\operatorname{Re} z_1 - \operatorname{Re} z_2)}$$

Also sind x und $r = |z_2 - x|$ durch z_1, z_2 eindeutig bestimmt. Auch dieses Argument hat eine geometrische Interpretation: x ist der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten

auf die Verbindungsstrecke von z_1 und z_2 mit der reellen Achse, und r ist der Abstand

von x zu z_2 (siehe Bild 3.19).

z 2

r

z 1

Re z

x

Bild 3.19

.

Damit ist gezeigt, daß H und G das Axiom (I 1) erfüllen. Die Axiome (I 2) und

(I 3) sind leicht nachzuprüfen: (I 2) besagt, daß jedes $g \in G$ mindestens zwei Punkte

enthält, und das ist klar aus der Definition. Axiom (I 3) besagt, daß es drei Punkte

in H gibt, die nicht alle auf ein und demselben Element von G liegen. Wir überlassen

es den LeserInnen als Übung, drei solche Punkte zu finden.

Schließlich ist klar, daß das Parallelenaxiom (P) für H und G *nicht* gilt. Es gilt

sogar das genaue Gegenteil:

Lemma 24 *Sind* $g \in G$, $z\,0 \in H$ *und ist* $z\,0 /$

$\in g$, *so gibt es unendlich viele verschie-*

dene $g \in G$ *mit* $z\,0 \in g$ *und* $g \cap g = \emptyset$.

Beweis Wir beweisen Lemma 24 zunächst nur im Spezialfall, daß

$g = \{z \in H \mid \mathrm{Re}\, z = 0\}$,

$\mathrm{Re}\, z\,0 = 0$.

(3.1)

Das ist natürlich ausreichend, um zu zeigen, daß das Parallelenaxiom (P) für H und

G nicht gilt. Später, wenn wir etwas mehr Theorie zur Verfügung haben, werden wir

zeigen, daß man die allgemeine Aussage von Lemma 24 aus dem obigen Spezialfall

herleiten kann (Übung nach Korollar 30). Betrachten wir also den Spezialfall (3.1).

Ist $x \in \mathrm{R}$, $r(x) := |z_0 - x|$ und $g_{x,r}$ das Element von G

$g_{x,r} :=$

$z \in H \; |z - x| = r(x)$

,

so ist $z_0 \in g_{x,r}$. Ferner ist $g_{x,r} \cap g = \emptyset$ genau dann, wenn erstens x und $\mathrm{Re}\, z_0$ das gleiche Vorzeichen haben und zweitens $r(x) < |x|$ (siehe Bild 3.20).

z_0

g

$g_{x,r}$

$r(x)$

$\mathrm{Re}\, z$

x

Bild 3.20

Diese beiden Bedingungen können wir zusammenfassen zu folgender Ungleichung

für x

$2\,x\,\mathrm{Re}\,z_0 > |z_0|^2$,

(3.2)

die offensichtlich unendlich viele Lösungen hat.

✷

.

3.2 Das Poincaré-Modell der hyperbolischen Ebene

Wir fahren jetzt fort, die Daten anzugeben, die ein 5-Tupel ($H, G, Z, \sim$

$=$,

) ergeben

werden, in dem alle Axiome für eine euklidische Ebene“ außer dem Parallelenaxiom

”

gelten. Als nächstes spezifizieren wir die Menge Z, welche die Beziehung zwischen“

”

beschreibt. Wir setzen $Z := Z_1 \cup Z_2$ (siehe Bilder 3.21 und 3.22) mit

$Z_1 := \{ (z_1, z_2, z_3) \in H \times H \times H \mid \mathrm{Re}\,z_1 = \mathrm{Re}\,z_2 = \mathrm{Re}\,z_3, z_1 = z_3$, es gibt ein t, $0 < t < 1$, so daß $z_2 = tz_1 + (1 - t)\,z_3 \}$,

Im z

z_3

z_2

z_1

Re z

Bild 3.21

$Z_2 := \{ (z_1, z_2, z_3) \in H \times H \times H \mid \mathrm{Re}\, z_1 < \mathrm{Re}\, z_2 < \mathrm{Re}\, z_3$ oder $\mathrm{Re}\, z_1 > \mathrm{Re}\, z_2 > \mathrm{Re}\, z_3$, es gibt ein $g \in G_2$ mit $z_1, z_2, z_3 \in g \}$.

Im z

z

g

1

z_2

z_3

Re z

Bild 3.22

..

Ubung: Zeigen Sie, daß die Axiome (L1..4) und das Dedekind'sche Axiom (S2) erfüllt

sind!

.
.
.
.
.
.
.

3 Das Parallelenaxiom

Schließlich müssen wir noch die Äquivalenzrelationen $\sim$

$=$ und

angeben, die die

Kongruenz von Strecken bzw. Winkeln beschreiben. Im Fall von Satz 3.1 hatten

wir für das Modell R2 einer euklidischen Ebene ein Maß für die Länge von Strek-

ken und die Größe von Winkeln eingeführt und definiert, daß zwei Strecken (bzw.

Winkel) kongruent sind, wenn sie gleiche Länge (bzw. Größe) haben. Ein ähnliches

Vorgehen wäre auch hier möglich: Man kann auf der oberen Halbebene H einen

Abstand definieren (der von dem üblichen euklidischen Abstand verschieden ist)

und die übliche euklidische Winkelmessung verwenden, um Kongruenz von Strecken

und Winkeln so zu definieren, daß die verbleibenden Axiome (K1..6) und (S1) erfüllt

sind.

Wir wählen einen anderen Zugang: Wir werden eine Gruppe von Bijektionen

der oberen Halbebene angeben, so daß jede dieser Bijektionen Elemente von G in

Elemente von G überführt. Dann werden wir definieren, daß zwei Strecken PQ und

PQ kongruent sind, wenn es eine Bijektion ϕ aus dieser Gruppe gibt, so daß $\phi(P) =$

P und $\phi(Q) = Q$. Ähnlich werden wir für Winkel verfahren. Dieser Zugang wäre

auch im Fall von Satz 3.1 möglich gewesen. Als Gruppe hätten wir die Menge aller

Abbildungen der Form

$\mathrm{R}2 \longrightarrow \mathrm{R}2$

x_1

$\longrightarrow$

$\cos\phi$

$\sin\phi$

x_1

t

$+$

1

x_2

$-\sin\phi\cos\phi$

x_2

t_2

mit $\phi, t_1, t_2 \in \mathrm{R}$ nehmen können.

..

Ubung: Zeigen Sie, daß die obigen Abbildungen eine Gruppe bilden! Verwenden Sie

Bemerkung 4 aus Abschnitt 1.1, um zu zeigen, daß diese Gruppe die Gruppe aller

orientierungserhaltenden Isometrien der Ebene ist!

Um die Gruppe von Bijektionen von H angeben zu können, die wir zur Definition

von $\sim$

$=$ und

verwenden werden, machen wir zunächst einen Exkurs über *gebrochen*

lineare Transformationen.

a

b

Definition 25 *Ist* $A =$

eine komplexe (2×2) *-Matrix mit*

c

d

$\det A := ad - bc = 0$ *, so nennt man die Abbildung* ϕA*, die für* $c = 0$ *gegeben ist*

durch

$\phi A : \mathbb{C} \setminus \{-d/c\} \longrightarrow \mathbb{C}$

$az + b$

1

$ad - bc$

z

$-\rightarrow$

$=$

$a -$

$cz + d$

c

$cz + d$

bzw. $f^{\cdot}$

ur $c = 0$ *durch*

$\phi A : \mathrm{C} -\rightarrow \mathrm{C}$

a

b

z

$- \rightarrow az + b = z + ,$

$cz + d$

d

d

eine gebrochen lineare Transformation *oder* Möbius-Transformation .

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

3.2 Das Poincaré-Modell der hyperbolischen Ebene

105

Man beachte, daß die Bedingung det $A := ad - bc = 0$ sicherstellt, daß c und d

nicht beide Null sind, so daß der Nenner $cz + d$ nicht identisch verschwindet. Man

sieht leicht, daß die zur Einheitsmatrix gehörende gebrochen lineare Abbildung die

Identität ist. Genauer gilt

1

0

$\phi A = id \Longleftrightarrow$ Es gibt $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda = 0$, so daß $A = \lambda$

(3.3)

0

1

Beispiele von gebrochen linearen Transformationen:

1 b

i) Ist $A =$

,

so ist ϕ

0 1

A die Translation um b :

$\phi A\,(z) = z + b$

λ

0

ii) Ist $A =$

mit

$\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{ 0 \}$, so ist ϕ

0

$1/\lambda$

A die Streckung um den Faktor

λ 2 vom Ursprung aus

ϕA (z) = λ 2 · z

.

0 1

iii) Ist A =

,

so ist

ϕ

.

1 0

A (z) = 1

z

Die Abbildung C \ { 0 } − → C \ { 0 } , z → ϕA (z) = 1 , die aus der Hintereinan-

z

derschaltung von ϕA mit der Spiegelung z → z an der reellen Achse entsteht,

nennt man die *Inversion am Einheitskreis*. Ist nämlich z = r ei ϕ ∈ C \ { 0 } ,

so ist

1

1

ϕA (z) =

=

$e^{i\phi}$

z

r

Das Bild von z ist also der Punkt auf der Geraden durch 0 und z, dessen

Abstand von 0 das Reziproke des Abstandes von z von 0 ist. Insbesondere

sind alle Punkte des Einheitskreises $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z| = 1\}$ Fixpunkte der

Inversion am Einheitskreis.

Wir bezeichnen mit $GL(2, \mathbb{C})$ die Menge aller komplexen (2×2)-Matrizen A, deren

Determinante $\det A$ von Null verschieden ist.

..

Ubung:

a

b

Sei $A =$

eine komplexe (2×2)-Matrix. Zeigen Sie: A ist invertierbar genau

c

d

1

d

$-b$

dann, wenn det $A = 0$. In diesem Fall ist $A^{-1} =$

!

det A $-c$

a

Zeigen Sie: det(AB) = det $A \cdot$ det B für alle komplexen (2×2)-Matrizen A, B!

.
.
.
.
.
.
.
.

Zeigen Sie: $GL(2, \mathbb{C})$ mit Matrizenmultiplikation ist eine Gruppe, und

$SL(2, \mathbb{C}) = \{A \in GL(2, \mathbb{C}) \mid \det A = 1\}$ ist eine Untergruppe von $GL(2, \mathbb{C})$!

Die Rechenregeln für $GL(2, \mathbb{C})$ übertragen sich in Rechenregeln für gebrochen lineare Transformationen, denn es gilt:

Lemma 26

1. Sind $A,B \in GL(2, \mathbb{C})$ *, so ist*

$\phi B \circ \phi A = \phi BA$

auf der Menge aller komplexen Zahlen, f

ur die sowohl die linke als auch die

rechte Seite der obigen Formel definiert ist.

a

b

2. Sei A =

$\in GL(2, \mathbb{C})$. *Ist c* = 0 , *so ist* ϕ

c

d

A eine Bijektion

$\phi A : \mathbb{C} \setminus \{-d/c\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{a/c\}$

Ist c = 0, so ist ϕA *die Bijektion*

b

$\phi A : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longrightarrow a z +$

d

d

In beiden F¨

allen ist die zugeh¨

orige inverse Abbildung ϕA^{-1} .

Der Beweis von Lemma 26 vereinfacht sich, wenn man die folgende Rechenregel

verwendet:

a

b

Bemerkung 27 Ist $A =$

$\in GL(2, \mathbb{C})$ und $z \in \mathbb{C}$, $z = -d/c$, so kann man

c

d

$az + b$

$\phi A(z) =$

auch folgendermaßen erhalten: Wähle irgend zwei komplexe Zahlen

$cz + d$

u

z

z

1

1

1 und z 2 so daß $z = z$ 1 $/z$ 2, und setze

$= A$

. Dann ist

u 2

z 2

$az + b$

az

az

u

ϕ

$1 /z 2 + b$

$1 + bz 2$

1

$A(z) =$

$=$

$=$

$=$

$cz + d$

$cz 1 /z 2 + d$

$cz 1 + dz 2$

$u 2$

Beweis von Lemma 26: Wir wenden die Rechenregel aus Bemerkung 27 auf beide

Seiten der in Teil *1* behaupteten Gleichung

$\phi B \circ \phi A = \phi BA$

an. Ist $z \in$ C, so wähle wie oben $z 1 ,z 2 \in$ C so daß $z = z 1 /z 2$. Sei

$u 1$

z

$= A$

1

.

(3.4)

u 2

z 2

Dann ist, wie gesagt, $\phi A(z) = u_1 / u_2$. Das Bild $\phi B(\phi A(z))$ von $\phi A(z)$ unter ϕB

erhält man nach der Rechenregel von Bemerkung 27, indem man zwei komplexe

Zahlen wählt, deren Quotient $\phi A(z)$ ist, die Matrix B auf den aus diesen beiden

Zahlen gebildeten Vektor anwendet, und den Quotienten der beiden Komponenten

des entstehenden Vektors bildet. Als die beiden Zahlen, deren Quotient $\phi A(z)$ ist,

kann man natürlich u_1 und u_2 wählen. Ist also

.

.

.

w 1

u

$= B$

1

,

(3.5)

w 2

u 2

so ist

w

ϕ

1

$B \circ \phi A(z) = \phi B (\phi A(z)) = w$ 2

Aus (3.4), (3.5) folgt

w 1

z

$= B A$

1

w 2

z 2

Indem man wieder Bemerkung 27 anwendet, sieht man, daß

w

ϕ

1

$BA(z) = w$ 2

Damit ist Teil *1* des Lemmas bewiesen. Teil *2* folgt direkt aus Teil *1* , denn

$\phi A - 1 \circ \phi A = \phi\ 11 = id$ und $\phi A \circ \phi A - 1 = \phi\ 11 = id$,

1

0

wobei 11 die (2 × 2)-Einheitsmatrix

bezeichnet.

✷

0

1

Die Gruppe der Bijektionen von *H*, die wir zur Definition der Kongruenzrelationen

verwenden wollen, besteht aus gebrochen linearen Transformationen ϕA, wobei *A*

eine (2 × 2)-Matrix mit *reellen* Einträgen und Determinante 1 ist. Wir definieren

a

b

a

b

$SL(2\ ,\ \mathrm{R}) :=$

$\in GL(2\ ,\ \mathrm{C})\ a,b,c,d \in \mathrm{R}$, det

= 1

c

d

c

d

¨

Ubung: (i) Zeigen Sie, daß $SL(2, \mathbb{R})$ eine Untergruppe von $GL(2, \mathbb{C})$ ist!

(ii) Zeigen Sie, daß es für jede reelle (2×2)-Matrix A mit $\det A > 0$ eine Matrix

$A \in SL(2, \mathbb{R})$ gibt, so daß $\phi A = \phi A$!

Wir müssen nun verifizieren, daß die gebrochen linearen Transformationen ϕA mit

$A \in SL(2, \mathbb{R})$ die obere Halbebene H bijektiv auf sich abbilden und Elemente des

Systems G von Teilmengen von H wieder auf Elemente von G abbilden. Dies, und

noch mehr, ist in den folgenden beiden Propositionen enthalten:

Proposition 28

1. F¨

ur jedes $A \in SL(2, \mathbb{R})$ *induziert* ϕA *eine Bijektion* $(\phi A)|H$

der oberen Halbebene H auf sich.

2. Wir nennen die Menge aller $A \in SL(2, \mathbb{R})$ *mit* $\phi A(i) = i$ *die Stabilisatorun-*

tergruppe $StabSL(2, \mathbb{R})(i)$ *des Punktes* $i \in H$*. Es gilt:*

a

$-b$

$StabSL(2, \mathrm{R})(i) =$

$a, b \in \mathrm{R}, a^2 + b^2 = 1$

b

a

3. Sind z,z zwei verschiedene Punkte von H, so gibt es eine bis auf Multiplikation

mit -1 *eindeutig bestimmte Matrix* $A \in SL(2, \mathrm{R})$ *so daß*

$\phi A(z) = i$, $Re\ \phi A(z) = 0$, $Im\ \phi A(z) > 1$

a

b

a

$-b$

4. Ist $A =$

$\in SL(2, \mathrm{R})$ *und* $A =$

so ist

c

d

$-c$

d

$\phi A(-z) = -\phi A(z)$

..

Ubung:

i) Zeigen Sie:

a

b

$\cos \phi$

$-\sin\phi$

$-$

$a,b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1 =$

$\phi \in \mathbb{R}$!

b

a

$\sin\phi$

$\cos\phi$

ii) Was ist die Fixpunktmenge der Abbildung $z \mapsto -z$?

Beweis von Proposition 28:

1. Nach Bemerkung 27 ist für jedes $A \in SL(2, \mathbb{R})$ die Abbildung ϕA definiert und

injektiv auf $\mathbb{C}$ mit Ausnahme des einen Punktes $-d/c$, der ja nicht in H liegt.

Dasselbe gilt für die inverse Abbildung ϕA^{-1}. Deshalb genügt es, zu zeigen,

daß

$\phi A(H) \subset H$ für alle $A \in SL(2, \mathbb{R})$

Mit anderen Worten, es genügt zu zeigen, daß

a

b

$\operatorname{Im} \phi A(z) > 0$ für alle $z \in H, A =$

$\in SL(2, \mathbb{R})$

c

d

Für jede komplexe Zahl w berechnet sich der Imaginärteil als

1

Im w =

(w − w)

2 i

Wir wenden diese Formel auf Im ϕA(z) an:

1

az + b

az + b

1

az + b

az + b

Im ϕA(z) =

−

=

−

2 i

cz + d

cz + d

2 i

$cz + d$

$cz + d$

1 ($az + b$)($cz + d$) − ($az + b$)($cz + d$)

= 2 i

($cz + d$)($cz + d$)

1 $adz + bcz - adz - bcz$

1 ($ad - bc$)($z - z$)

=

=

2 i

$|cz + d|$ 2

2 i

$|cz + d|$ 2

1

1

=

· 1 ($z - z$) =

Im z

$|cz + d|$ 2 2 i

$|cz + d|$ 2

Da $z \in H$, ist der letzte Ausdruck positiv.

.

.

.

.

.

.

3.2 Das Poincaré-Modell der hyperbolischen Ebene

109

a

b

2. Ist $A =$

$\in SL(2\ ,\ \mathrm{R})$, so gilt

c

d

$\phi A(\ i) = i \Longleftrightarrow ai + b = i \Longleftrightarrow ai + b = -c + di \Longleftrightarrow d = a$ und $c = -b\ ci + d$

a

$-b$

Damit eine Matrix der Form $A =$

in $SL(2\ ,\ \mathrm{R})$ liegt, ist notwendig

b

a

und hinreichend, daß $\det A = a\ 2 + b\ 2 = 1$.

3. Zunächst zeigen wir, daß es ˜

$A \in SL(2, \mathrm{R})$ gibt, so daß

$\phi\tilde{}(z) = i.$

(3.6)

A

~

a

~

b

In der Tat, für ~

$A =$

$\in SL(2, \mathrm{R})$ ist (3.6) äquivalent zu $\tilde{} az + \tilde{} b = i(\tilde{} cz + \tilde{}$

$d)$,

~

c

~

d

das heißt zu

~

$b = -\tilde{} a \operatorname{Re} z - \tilde{} c \operatorname{Im} z$,

~

$d = \tilde{}$

a Im z − ˜ c Re z.

(3.7)

Wählt man ˜

a und ˜

c so, daß (˜

a 2 + ˜

c 2) Im z = 1 , und definiert man ˜

b und ˜

d

durch (3.7), so ist

˜

a ˜

d − ˜ b˜ c = (˜ a 2 + ˜ c 2) Im z = 1

˜

a

˜

b

Somit liegt die Matrix ˜

A =

in SL(2 , R), und wegen (3.7) ist

˜

c

$\tilde{}$

d

$\phi\,\tilde{}(\,z) = i$. Wir setzen $z := \phi\,(\,z\,)$.

A

$\tilde{}$

A

Als nächstes zeigen wir, daß es $B \in StabSL(2\,,\mathrm{R})(\,i)$ gibt, so daß

$\mathrm{Re}\,\phi B(\,z\,) = 0$.

(3.8)

Nach Teil *2* von Proposition 28 ist

a

$-b$

$StabSL(2\,,\mathrm{R})(\,i) =$

$a,b \in \mathrm{R}\,, a\,2 + b\,2 = 1$

b

a

$az - b$

Wir haben also zu zeigen, daß es $a,b \in \mathrm{R}$ mit $a\,2 + b\,2 = 1$ gibt, so daß $bz + a$

rein imaginär ist. Wegen

$az - b$

1

Re

=

Re ($az - b$)($bz + a$)

$bz + a$

$|bz + a|$ 2

ist dazu äquivalent:

f (a,b) := (a 2 − b 2) Re z − ab(1 − $|z|$ 2) = 0 .

(3.9)

Wir suchen eine Lösung (a,b) der Gleichung (3.9) auf der Kreislinie (siehe Bild

3.23)

.

b

(0 , 1)

(1 , 0)

a

Bild 3.23

S 1 := {(a,b) ∈ R2 | a 2 + b 2 = 1 }

Da f (1 , 0) = Re z = −f (0 , 1), folgt aus dem Zwischenwertsatz, daß Gleichung

(3.9) auf S 1 eine Lösung hat. Damit ist gezeigt, daß es ein $B \in StabSL(2\ ,\ \mathrm{R})(\ i)$ gibt, welches (3.8) erfüllt.

Da $z = z$, ist auch $\phi B(\ z\ ) = \phi$

$(\ z\ )$ verschieden von

B ˜

A

ϕ

$(\ z) = \phi$

$(\ z)) = \phi$

B ˜

A

$B\ (\ \phi$ ˜

A

$B\ (\ i) = i$

Insbesondere ist Im $\phi B(\ z\ ) = 1$. Ist Im $\phi B(\ z\ ) > 1$, so setzen wir $A := B$ ˜

A

und erhalten die in Teil *3* von Proposition 28 geforderten Eigenschaften. Ist

Im $\phi B(\ z\ ) < 1$, so setze

0

− 1

$C :=$

1

0

Dann ist $\phi C(w) = -1/w$ für alle $w \in H$. Insbesondere ist

$\phi C(i) = i$, $\operatorname{Re} \phi C(\phi B(z)) = 0$ und $\operatorname{Im} \phi C(\phi B(z)) > 1$

In diesem Fall hat also $A := CB\tilde{}$

A die gewünschten Eigenschaften.

Um die Eindeutigkeit zu beweisen, betrachten wir eine zweite Matrix A, so

daß

$\phi A(z) = i$, $\operatorname{Re} \phi A(z) = 0$ und $\operatorname{Im} \phi A(z) > 1$

Wir schreiben $\phi A(z) = it$ mit $t > 1$ und setzen $D := A A^{-1}$. Dann ist

$\phi D(i) = i$, das heißt $\phi D \in StabSL(2, \mathbb{R})(i)$. Nach Teil *3* der Proposition können wir schreiben

α

$-\beta$

$D =$

mit $\alpha^2 + \beta^2 = 1$

β

α

.

.

.

.

.

.

.

.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.

3.2 Das Poincaré-Modell der hyperbolischen Ebene

111

Ferner gilt Re $\phi D(\ it) = 0$ und Im $\phi D(\ it) > 1$. Setzen wir die spezielle Form

von ϕD ein, so erhalten wir

$\alpha it - \beta$

$\alpha\beta(\ t\ 2 - 1)$

$(\ \alpha\ 2 + \beta\ 2)\ t$

$\phi D(\ it) =$

$=$

$+\ i$

$\beta it + \alpha$

$\alpha\ 2 + \beta\ 2\ t\ 2$

α 2 + β 2 t 2

Wegen Re $\phi D(\ it) = 0$ und $t > 1$ ist $\alpha\beta = 0$, also $\alpha = 0$ oder $\beta = 0$. Im ersten

Fall wäre $D = \pm$ 0 − 1 , und somit hätte ϕ

1

0

$D\ (\ i) = i/t$ einen Imaginärteil,

der kleiner als 1 ist. Also muß $\beta = 0$ sein, d.h. $D = \pm id$ und somit $A = \pm A$.

4. $\phi A\ (\ -z) = -az - b = -\ az + b = -\phi$

$cz + d$

$cz + d$

$A(\ z)$.

✷

Proposition 29

1. F¨

ur jedes $A \in SL(2\ ,\ \mathrm{R})$ *und jedes* $g \in G$ *ist* $\phi A(\ g) \in G$.

2. Ist $(\ z\ 1\ ,z\ 2\ ,z\ 3) \in Z$ *und* $A \in SL(2\ ,\ \mathrm{R})$, *so ist* $(\ \phi A(\ z\ 1)\ ,\phi A(\ z\ 2)\ ,\phi A(\ z\ 3)) \in Z$.

3. Sind $z\ 1\ ,z\ 2\ ,z\ ,z \in H$, *so daß* z

$= z$, *so gibt es genau eine gebrochen*

1

2

$1 = z\ 2\ ,\ z\ 1$

2

lineare Abbildung ϕA *mit* $A \in SL(2\ ,\ \mathrm{R})$ *, die den Strahl von* $z\ 1$ *aus in Richtung*

$z\ 2$ *in den Strahl von* z *aus in Richtung* z

1

2 ¨

uberf¨

uhrt. In Formeln

$\phi A(\ z\ 1) = z$ *und* ϕ

$,z\ )$

1

$A(\ S(\ z\ 1\ ,z\ 2)) = S(\ z\ 1\ 2$

Beweis

1. Es ist der naheliegendste Beweis, die Definitionen einzusetzen und alles nachzu-

rechnen. Dies tun wir hier auch. In Bemerkung 44 geben wir einen eleganteren

Beweis, der auf der Tatsache beruht, daß jede gebrochen lineare Transfor-

mation Kreise und Geraden in Kreise oder Geraden überführt (Proposition

42). Nun aber zum rechnerischen Beweis von Proposition 29. *1* . Wir schreiben

a

b

$A- 1 =$

. Dann ist

c

d

$\phi A(g) = (\phi A- 1) - 1(g) = \{z \in H \mid \phi A- 1(z) \in g\} = \{z \in H \mid az+ b \in g\}$

$cz+ d$

1. Fall : $g \in G$ 1, d.h. es gibt $\alpha \in$ R so daß $g = \{w \in H \mid$ Re $w = \alpha\}$. Nach obiger Formel ist

$z \in \phi A(g)$

$az + b$

$az + b$

$az + b$

$az + b$

$\Longleftrightarrow$

$\in g \Longleftrightarrow$ Re

$= \alpha \Longleftrightarrow$

$+$

$= 2 \alpha$

$cz + d$

$cz + d$

$cz + d$

$cz + d$

$\Longleftrightarrow 2\, acz\bar{z} + (\, ad + bc)(\, z + \bar{z}) + 2\, bd = 2\, \alpha$

$c\, 2\, z\bar{z} + cd(\, z + \bar{z}) + d\, 2$

Dies wiederum ist äquivalent zu

$2\, c(\, a - \alpha c)\, z\bar{z} + (\, ad + bc - 2\, \alpha cd)(\, z + \bar{z}) + 2\, d(\, b - \alpha d) = 0$.

(3.10)

.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.

• Falls $c = 0$ oder $a - \alpha c = 0$, so ist (3.10) äquivalent zu

$2(\, ad + bc - 2\, \alpha cd)\, \mathrm{Re}\, z + 2\, d(\, b - \alpha d) = 0$

In dieser Situation ist $ad + bc - 2\, \alpha cd = 0$. Denn für $c = 0$ wird $ad + bc -$

$2\, \alpha cd = ad = ad - bc = 1$, und ist $a - \alpha c = 0$, so wird

$ad + bc - 2\, \alpha cd = ad + bc - 2\, ad = -(\, ad - bc) = -\, 1$

Also ist in dieser Situation (3.10) äquivalent zu

$d(\, \alpha d - b)$

Re $z = \alpha$ mit $\alpha :=$

,

$ad + bc - 2\,\alpha cd$

das heißt, zu

$z \in \{w \in H \mid \mathrm{Re}\, w = \alpha\}$

Diese Menge ist ein Element des Systems G 1.

• Falls $c(a - \alpha c) = 0$, so ist (3.10) äquivalent zu

$zz - x(z + z) + x^2 - r^2 = 0$,

(3.11)

wobei

$x := -d(a - \alpha c) + c(b - \alpha d)$

$2\,c(a - \alpha c)$

$r :=$

$x^2 - d(b - \alpha d)$

$c(a - \alpha c)$

Man beachte, daß der Ausdruck unter der Wurzel positiv ist, denn

$[d(a - \alpha c) - c(b - \alpha d)]^2$

1

$x^2 - d(b - \alpha d) =$

$=$

$c(a - \alpha c)$

$4\ c\ 2(\ a - \alpha c)2$

$4\ c\ 2(\ a - \alpha c)2$

(3.11) wiederum ist äquivalent zu $(\ z - x\ )(\ z - x\ ) = r\ 2$, also

$z \in w \in H\ |z - x\ | = r$

Diese Menge ist ein Element des Systems $G\ 2$.

2. Fall : $g \in G\ 2$, das heißt es gibt $r > 0$, $x \in$ R so daß

$g =$

$w \in H\ |z - x| = r$

Wieder ist

$z \in \phi A(\ g)$

$\Longleftrightarrow az + b - x = r \Longleftrightarrow |(\ a - cx)\ z + (\ b - dx)\ |\ 2 = |r(\ cz + d)\ |\ 2$

$cz + d$

Dies liefert eine Gleichung für z der Form (3.11); der Beweis läßt sich dann fortsetzen wie dort.

.

3.2 Das Poincaré-Modell der hyperbolischen Ebene

2. Ist $g = gx,r$ eine Gerade aus dem System $G\ 2$, so definiert

$\pi g : g$

$- \rightarrow$ R

z

$- \to \operatorname{Re} z$

eine Bijektion von g auf das offene Intervall $Ig :=]\, x - r, x + r[\, \subset \mathbb{R}$. Für

$g = g\alpha \in G\,1$ setzen wir $\pi g(z) := \operatorname{Im} z$ und erhalten eine Bijektion zwischen g

und $Ig := \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\}$.

Sei nun g die Gerade durch $z\,1$, $z\,2$, $z\,3$ und g die Gerade durch $\phi(z\,1)$, $\phi(z\,2)$, $\phi(z\,3)$. Da $(z\,1, z\,2, z\,3) \in Z$, liegt $\pi g(z\,2)$ in Ig zwischen $\pi g(z\,1)$ und $\pi g(z\,3)$. Die Abbildung

$F := \pi g \circ \phi A \circ \pi - 1 : I$

g

$g - \to Ig$

ist eine stetige Bijektion, also monoton, und $F(\pi g(z\,2)) = \pi g(\phi A(z\,2))$ liegt

zwischen $F(\pi g(z\,1)) = \pi g(\phi A(z\,1))$ und $F(\pi g(z\,3)) = \pi g(\phi A(z\,3))$. Deshalb ist $(\phi A(z\,1), \phi A(z\,2), \phi A(z\,3)) \in Z$.

3. Aus den Teilen *1* und *2* der Proposition folgt, daß gebrochen lineare Transfor-

mationen ϕA mit $A \in SL(2, \mathbb{R})$ Strahlen stets wieder auf Strahlen abbilden.

Um auch später die Beweise zu vereinfachen, führen wir einen speziellen Strahl

$S\,0 := \{ti \mid t \in [1, \infty[\,\} = S(i, 2i)$

ein, nämlich den vom Punkt i ausgehenden, gegen ∞ gehenden Teil der ima-

ginären Achse (siehe Bild 3.24).

$S\,0$

$2i$

i

Re z

Bild 3.24

Teil *3* in Proposition 28 zeigt, daß es eindeutig bestimmte gebrochen lineare

Transformationen ϕB und ϕB mit $B,B \in SL(2 , \mathrm{R})$ gibt, so daß

$\phi B(z\ 1) = \phi B (z) = i$ und ϕ

$,z)) = S$

1

$B (S(z\ 1 ,z\ 2)) = \phi B (S(z\ 1\ 2$

0

Dann ist $\phi - 1 \circ \phi$

B

B die eindeutig bestimmte gebrochen lineare Transformation

mit den geforderten Eigenschaften.

✷

.

Korollar 30 *Sind* $z,z \in H$ *und* $g,g \in G$ *so daß* $z \in g$, $z \in g$, *so gibt es* $A \in$

$SL(2 , \mathrm{R})$ *mit* $\phi A(z) = z$ *und* $\phi A(g) = g$.

Beweis Wähle $w \in g$, $w \in g$ so, daß $w = z$, $w = z$. Nach Teil *3* der obigen Proposition gibt es $A \in SL(2 , \mathrm{R})$ mit $\phi A(z) = z$ und $\phi A(S(z,w)) = S(z ,w)$. Da $S(z,w) \subset g$, $S(z ,w) \subset g$, folgt $\phi A(g) = g$.

✷

..

Ubung: Verwenden Sie Korollar 30, um Lemma 24 aus dem Spezialfall (3.1) herzu-

leiten!

Bemerkung 31 (nicht wesentlich für das Folgende) Lemma 26 und Proposition 28

zeigen, daß die Abbildung

$SL(2, \mathrm{R}) \times H$

$\longrightarrow H$

(A, z)

$\longrightarrow \phi A(z)$

eine Operation der Gruppe $SL(2, \mathrm{R})$ auf H definiert. Die Aussage von Korollar 30

impliziert, daß diese Operation transitiv ist. Genauer: Man definiere eine Operation

von $SL(2, \mathrm{R})$ auf der Menge

$F := \{(z, g) \in H \times G \mid z \in g\}$

durch

$SL(2, \mathrm{R}) \times F$

$\longrightarrow F$

$A, (z, g)$

$\longrightarrow$

$\phi A(z), \phi A(g)$

Dann besagt Korollar 30 gerade, daß diese Operation transitiv ist.

Nach diesem Exkurs über gebrochen lineare Transformationen kommen wir zur

Definition der Äquivalenzrelationen $\sim$

$=$ und

, die die Konstruktion des 5-Tupels

$(H, G, Z, \sim$

$=$,

) komplettieren. Die Äquivalenzrelation $\sim$

$=$ auf $H \times H$, welche die

Kongruenz von Strecken beschreibt, definieren wir durch

$(z_1, z_2) \sim$

$= (z, z) \Longleftrightarrow$ es gibt $A \in SL(2, \mathbb{R})$ mit ϕ

, ϕ

1

2

$A(z_1) = z_1$

$A(z_2) = z_2$

Dies ist in der Tat eine Äquivalenzrelation, denn für z_1, z, z

$, z$

$\in H$ und

1

1

2 ,z 2 2

$A,B \in SL(2$, R) gilt

• (z 1 ,z 2) = (ϕ 11(z 1) ,ϕ 11(z 2))

• Ist (z ,z) = (ϕ

1

2

A(z 1) ,ϕA(z 2)) , so ist

(z 1 ,z 2) = (ϕA− 1(z) ,ϕ

))

1

A− 1 (z 2

• Ist (z ,z) = (ϕ

,z) = (ϕ

) ,ϕ

)), so ist

1

2

A(z 1) ,ϕA(z 2)) und (z 1

2

B (z 1

B (z 2

(z ,z) = (ϕ

1

2

$B \circ A$(z 1) ,$\phi B \circ A$(z 2))

Schließlich definieren wir die Äquivalenzrelation

auf

.

.

3.2 Das Poincaré-Modell der hyperbolischen Ebene

115

{(z 1 ,z 2 ,z 3) ∈ $H \times H \times H$ | es gibt kein $g \in G$ so daß z 1 ,z 2 ,z 3 ∈ g}

welche die Kongruenz von Winkeln beschreibt, durch

(z 1 ,z 2 ,z 3)

(z ,z ,z) ⇐⇒

1

2

3

es gibt $A \in SL$(2 , R) so daß

⎧

⎨ ϕA(z 1) ∈ S(z ,z) und ϕ

$,z$)

2

1

$A(z\ 3) \in S(z\ 2\ 3$

$\phi A(z\ 2) = z$ und

oder

2

⎩ $\phi A(z\ 3) \in S(z\ ,z\ )$ und ϕ

$,z$)

2

1

$A(z\ 1) \in S(z\ 2\ 3$

Wir erinnern daran, daß $S(z,z\ )$ den Strahl von z aus in Richtung z bezeichnet (siehe Bild 3.25).

Im z

z 3

$S(z\ ,z\ )$

2

3

z

ϕ

3

$A(z\ 3)$

$\phi A(z\ 1)$

$z\ 1$

$z\ 1$

$z\ 2$

z

$S(z, z)$

2

2

1

Re z

Bild 3.25

..

Ubung: Zeigen Sie, daß

eine Äquivalenzrelation ist!

..

Ubung: Sei $\sigma : H \longrightarrow H$, $z \longrightarrow -z$ die Spiegelung an der imaginären Achse. Zeigen

Sie:

a) Sind $z\ 1, z\ 2 \in H$, so sind die Strecken $z\ 1\ z\ 2$ und $\sigma(z\ 1)\ \sigma(z\ 2)$ kongruent!

b) Sind z_1, z_2, z_3 drei Punkte von H, die nicht auf einer Geraden liegen, so ist

$z_1 z_2 z_3$

$\sigma(z_1)\ \sigma(z_2)\ \sigma(z_3)$!

Hinweis: Verwenden Sie Proposition 28. *4, 5* und für Teil (b) auch Proposition 29. *3*!

Wir formulieren jetzt den bereits mehrfach angekündigten Satz, der impliziert,

daß das Parallelenaxiom (P) unabhängig von den übrigen Axiomen ist.

Satz 3.3 *Das oben definierte 5-Tupel* (*H,G,Z,* ∼

= ,

) *erf*¨

ullt alle Axiome einer

euklidischen Ebene“ bis auf das Parallelenaxiom (P) . *Das Parallelenaxiom* (P) *wird*

”

von diesem 5-Tupel verletzt.

.

.

.

.

Beweis Wir haben bereits gezeigt, daß das Parallelenaxiom nicht erfüllt ist (Lemma

24) und daß die Axiome (I1..3), (L1..4) und (S2) erfüllt sind. Wir haben also noch

die Gültigkeit der Kongruenzaxiome (K1..6) und des Archimedischen Axioms (S1)

zu überprüfen.

Das Axiom (K1) besagt im vorliegenden Kontext, daß es für jedes vorgegebene

System z 1 ,z 2 ,z ,z von Punkten in H mit z = z genau einen Punkt $z \in S$(z ,z) 1

3

1

3

2

1

3

gibt, so daß3 z

∼

∼

1 z 2 = z z . Falls z

z

= z .

1 2

1 = z 2, so ist z 1 2 = z 1 z 2 genau dann, wenn z 1

2

Wir betrachten nun den Fall, daß z 1 = z 2. Nach Proposition 29. *3* gibt es eine bis

aufs Vorzeichen eindeutig bestimmte Matrix $A \in SL(2 , \mathrm{R})$ so daß

$\phi A(z\ 1) = z$

und ϕ

$,z)$

1

$A (S(z\ 1 ,z\ 2)) = S(z\ 1\ 3$

Dann liegt $z := \phi$

$,z)$ und z

$\sim z$. Ist z ein weiterer

2

$A(z\ 2)$ auf dem Strahl $S(z\ 1\ 3$

$1\ z\ 2 = z\ 1\ 2$

2

Punkt auf $S(z ,z)$ so daß z

$\sim$

z , so gibt es nach Definition der Kongruenz

1

3

$1\ z\ 2 = z\ 1\ 2$

von Strecken eine Matrix $B \in SL(2 , \mathrm{R})$ so daß $\phi B(z\ 1) = z$ und ϕ

. Dann

1

B (z 2) = z 2

ist ϕB (S(z 1 ,z 2)) = S(z ,z). Nach der Eindeutigkeitsaussage von Proposition 29. *3*

1

3

ist $\phi A = \phi B$ und somit $z = z$.

2

2

Das Axiom (K2) besagt, daß für je zwei Punkte z

∼

1 ,z 2 ∈ H gilt, daß z 1 z 2 = z 2 z 1.

Unter Verwendung von Proposition 28. *4* können wir annehmen, daß z 1 = i, z 2 = it

√

0

− t

mit $t > 0$. Setzt man A :=

√

, so ist ϕ

1 / t

0

$A(i) = it$ und $\phi B(it) = i$.

Deshalb ist z

$\sim$

$1\ z\ 2 = z\ 2\ z\ 1$.

Axiom (K3) besagt, daß für je sechs Punkte $z\ 1$,$z\ 2$,$z\ 3$ und z ,z ,z , von denen

1

2

3

z

$\sim$

2 zwischen $z\ 1$ und $z\ 3$, und z

zwischen z

und z

liegt, wenn z

z

und

2

1

3

$1\ z\ 2 = z\ 1\ 2$

z

∼

∼

2 *z* 3 = *z z* , dann auch *z*

z gilt. Unter Verwendung vom Proposition 29. *2*

2 3

1 *z* 3 = *z* 1 3

können wir annehmen, daß

z 1 = *z* = *i* und *z*

,*z*

∈ *S*

1

2 ,*z* 2 3 ,*z* 3

0

Wegen

z

∼

1 *z* 2 = *z z* = *z*

1 2

1 *z* 2

sind *z* 1 *z* 2 und *z* 1 *z* kongruente Strecken auf dem Strahl *S*

2

0 mit dem Anfangspunkt

z 1 = i. Aus (K1) folgt, daß z 2 = z . Nun folgt aus

2

z

~

~

2 z 3 = z z

2 3 = z 2 z 3

wieder mit (K1), daß z

~

3 = z . Also ist z

z .

3

1 z 3 = z 1 3

Die Aussage von Axiom (K4), daß

P QR nur von den Strahlen S(Q,P) und

S(Q,R) abhängt, ist eine direkte Konsequenz der Definition.

Axiom (K5) besagt, daß man an jedem Strahl S einen vorgegebenen Winkel

z 1 z 2 z 3 auf jeder Seite in genau einer Weise antragen kann. Unter Verwendung

von Proposition 29. *3* können wir annehmen, daß S = S 0. Dann besagt Propositi-

on 29. *3*, daß es eindeutig bestimmte gebrochen lineare Transformationen ϕA, ϕB

mit $A,B \in SL(2, \mathbb{R})$ gibt, so daß $\phi A(z_2) = \phi B(z_2) = i$, $\phi A(S(z_2, z_1)) = S_0$ und 3 Hier – und im Folgenden – bezeichnet $z_1 z_2$ die *Strecke* $z_1 z_2$, nicht das Produkt der komplexen Zahlen z_1 und z_2.

.

.

$\phi B(S(z_2, z_3)) = S_0$. $S(i, \phi A(z_3))$ und $S(i, \phi B(z_1))$ sind dann die beiden eindeutig bestimmten Strahlen, die mit S_0 einen zu

$z_1 z_2 z_3$ kongruenten Winkel einschliessen

(siehe Bild 3.26).

Im z

S_0

z_3

$\phi B(z_3)$

$\phi A(z_1)$

ϕ

ϕ

$B(z$

$A(z$

1)

3)

z_1

i

z 2

Re *z*

Bild 3.26

Axiom (K6) besagt, daß zwei Dreiecke *z* 1 *z* 2 *z* 3 und *z z z* , von denen zwei Seiten und

1 2 3

der eingeschlossene Winkel kongruent sind, d.h.

z

∼

∼

1 *z* 2 = *z z* , *z*

z ,

z

z z

1 2

2 *z* 3 = *z* 2 3

1 *z* 2 *z* 3

z 1 2 3

überhaupt kongruent sind. Nach Proposition 29. *3* können wir wieder annehmen, daß

z 2 = *z* = *i* und *z*

$\in S$

2

3 ,z 3

0. Da

z

$\sim$

2 z 3 = z z = z

2 3

2 z 3

folgt aus (K1), daß z 3 = z . Aus (K5) und der Kongruenz der Winkel z

3

1 z 2 z 3 und

z z z =

z z

) entweder gleich S(z

1 2 3

1 2 z 3 folgt nun, daß S(z 2 ,z 1

2 ,z 1) ist oder gleich

dem Bild von S(z 2 ,z 1) unter der Abbildung $\sigma : z \longmapsto -z$ (siehe Bild 3.27).

Nun ist

z

~

2 z 1 = z z = z

2 1

2 z 1

also folgt mit (K1), daß z = z

= σ(z

1

1 oder z 1

1). Mit Hilfe der Übung direkt vor

Satz 3.3 ist die Kongruenz der Dreiecke z 1 z 2 z 3 und z z z leicht nachzupr

1 2 3

üfen.

Das Archimedische Axiom (S1) schließlich besagt, daß es zu vorgegebenen Punk-

ten z 1 ,z 2 ,z ,z mit z

= z eine nat

1

2

1 = z 2, z 1

2

ürliche Zahl n gibt, so daß nach

n-maligem Abtragen der Strecke *z* 1 *z* 2 auf dem Strahl *S*(*z* ,*z*) der Endpunkt

1

2

über *z* 2

.

.

.

Im *z*

z 3 = *z* 3

σ(*z*

z

1)

1

i = *z* 2 = *z* 2

Re *z*

Bild 3.27

Im *z*

it

it

i

Re z

Bild 3.28

hinausragt. Mit Proposition 29. *3* können wir wiederum annehmen, daß $z_1 = z = i$

und $z_2 = it$, $z = it$ mit $t,t > 1$ (siehe Bild 3.28).

Nun ist für $r > s > 0$ die Strecke zwischen ir und is kongruent zur Strecke zwischen

i und it genau dann, wenn $r = st$. In diesem Fall ist nämlich mit

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{s} & 0 \\ 0 & 1/s \end{pmatrix}$$

$\phi A(i) = is$ und $\phi A(it) = its = ir$. Folglich sind die Strecken zwischen i und it, zwischen it und $it^2, \ldots$, jeweils kongruent. Nun gibt es aber $n \in \mathbb{N}$ so daß $tn > t$.

Damit ist Satz 3.3 bewiesen.

✷

3.2 Das Poincaré-Modell der hyperbolischen Ebene

Das eben konstruierte System (*H,G,Z,* ∼

= ,

) heißt das *Poincar´*

e-Modell der

hyperbolischen Ebene. In ihm gelten die Axiome (I 1..3), (L1..4), (K1..6), (S1,2) sowie

die Negation des Parallelenaxioms.

¨

Ubung: Formulieren Sie die Negation des Parallelenaxioms!

Wir haben das Poincaré-Modell der hyperbolischen Ebene als Teilmenge der Men-

ge C der komplexen Zahlen konstruiert, und der Beweis von Satz 3.3 beruhte auf

Sätzen über reelle und komplexe Zahlen. Diese Sätze folgen alle aus den üblichen

Axiomen für reelle Zahlen (vgl. [Forster]). Also zeigt Satz 3.3 eigentlich nur: *Falls die*

¨

ublichen Axiome f¨

ur die reellen Zahlen widerspruchsfrei sind, so sind auch die Axio-

me (I 1..3), (L1..4), (K1..6), (S1,2) *zusammen mit der Negation des Parallelenaxioms*

widerspruchsfrei. Die reellen Zahlen kann man aus den natürlichen Zahlen konstru-

ieren (siehe z.B. [Ebbinghaus et al.] Kapitel 2), also folgt die Widerspruchsfreiheit

von (I 1..3), (L1..4), (K1..6), (S1,2) zusammen mit der Negation des Parallelenaxioms

bereits aus der (natürlich nicht bewiesenen) Widerspruchsfreiheit des üblichen Axio-

mensystems für Mengenlehre und natürliche Zahlen.

Man hätte das Poincaré-Modell der hyperbolischen Ebene auch rein in der Sprache

der euklidischen Geometrie beschreiben können, denn die Objekte sind ja (gewisse)

Punkte der euklidischen Ebene, Halbkreise in der euklidischen Ebene, Halbgeraden

in der euklidischen Ebene und so weiter. Ebenso hätte man Satz 3.3 rein mit Hilfe der

euklidischen Geometrie, d.h. nur unter Verwendung von Sätzen, die aus den Axiomen

der euklidischen Geometrie folgen, beweisen können. Das zeigt: *Wenn die Axiome*

der euklidischen Geometrie widerspruchsfrei sind, so ist auch das Axiomensystem, in

dem man das Parallelenaxiom durch seine Negation ersetzt, widerspruchsfrei. Diese

Aussage ist wohl die definitive Antwort auf die Frage nach der Unabhängigkeit des

Parallelenaxioms.

Man kann zeigen, daß (ähnlich wie in Satz 3.2) jedes System, in dem die Axio-

me (I 1..3), (L1..4), (K1..6), (S1,2) sowie die Negation des Parallelenaxioms gelten,

isomorph zum Poincaré-Modell der hyperbolischen Ebene ist [Efimow]. Ein solches

System nennt man eine *hyperbolische Ebene*. Folglich kann man die hyperbolische

Ebene sowohl synthetisch (d.h. ausgehend von den Axiomen) als auch analytisch

(d.h. ausgehend von der obigen Beschreibung des Poincaré-Modells) studieren. Wir

wählen den zweiten Zugang, da die Geometrie der oberen Halbebene auch in vielen

anderen Gebieten der Mathematik eine Rolle spielt, so z.B. in der Reduktionstheo-

rie binärer quadratischer Formen (siehe Abschnitt 3.5.3 oder [Scharlau–Opolka]),

in der Theorie elliptischer Funktionen (siehe z.B. [Lang]) oder bei der Uniformi-

sierung Riemannscher Flächen (siehe z.B. [Lehner]). Wir wollen nur einige wenige

Aspekte der Geometrie der hyperbolischen Ebene herausgreifen, nämlich die Längen-

messung, die Winkelmessung und den Satz, daß die Winkelsumme in einem hyper-

bolischen Dreieck stets kleiner als 180 ◦ ist. Systematische synthetische Untersuchun-

gen der hyperbolischen Ebene findet man z.B. in den Büchern von [Efimow]

oder

[Kelly–Matthews].

.

..

Ubung: Zeigen Sie, daß bei einer Definition der Kongruenzrelation für Strecken in H

mittels des euklidischen Abstands in C das Axiom (K1) verletzt wäre!

..

Ubung: Beweisen Sie Teil *2* von Proposition 28, indem Sie zeigen, daß für jedes

$A \in SL(2, \mathrm{R})$ gilt:

$\phi A(H) \subset \mathrm{C} \setminus \mathrm{R}$, $\phi A(H)$ ist zusammenhängend und $\operatorname{Im} \phi A(i) > 0$!

..

Ubung: Bestimmen Sie die Stabilisatoruntergruppe des Punktes $(i,g) \in F$ bezüglich

der in Bemerkung 31 definierten Operation von $SL(2, \mathrm{R})$ auf F! Hier bezeichne g die

imaginäre Achse $\{z \in H \mid \operatorname{Re} z = 0\}$.

..

Ubung: Sei G eine Gruppe, M eine Menge und $G \times M \to M$, $(g,m) \to g \cdot m$ eine

Gruppenoperation. Dann definiert

$m\,1 \sim m\,2 :\Longleftrightarrow m\,1 = g \cdot m\,2$ für ein $g \in G$

eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf M !

¨

Ubung: Zeigen Sie, daß die Strecke zwischen $-1 + i$ und $1 + i$ nicht kongruent ist zur

Strecke zwischen $-2 + i$ und $2 + i$!

3.3

Das Doppelverh¨

altnis und die L¨

angenmessung in der

hyperbolischen Ebene

Um eine Längenmessung für Strecken in H zu finden, die kongruenten Strecken

die gleiche Länge zuordnet, kann man folgendermaßen vorgehen: Man fixiert zu-

nächst eine Referenzstrecke, z.B. die Strecke zwischen i und $e \cdot i$ (e ist die Basis

des natürlichen Logarithmus) und normiert deren Länge auf 1. Dann sagt man,

zwei Punkte $z,z \in H$ haben den Abstand n (n eine natürliche Zahl), wenn nach

n-maligem Abtragen der Referenzstrecke auf dem Strahl $S(\,z,z\,)$ gerade der Punkt

z erreicht wird. Ebenso sagt man, z und z haben den Abstand $1\,/n$, wenn nach

n-maligem Abtragen der Strecke zz auf dem Strahl $S(\,i,e \cdot i)$ gerade der Punkt

$e \cdot i$ erreicht wird. Dann sagt man, z und z haben den Abstand m/n, falls durch

m-maliges Abtragen einer Strecke der Länge 1 */n* (d.h. einer Strecke zwischen zwei

Punkten, die den Abstand 1 */n* haben) auf dem Strahl *S*(*z*,*z*) gerade der Punkt *z*

erreicht wird. Schließlich definiert man für irgend zwei Punkte *z*,*z* ∈ *H* den Abstand

d(*z*,*z*) als

d(*z*,*z*) := sup

m/n ∈ Q

es gibt einen Punkt *z*

zwischen *z* und *z* ,

dessen Abstand zu *z* gleich *m/n* ist

Man kann zeigen, daß diese Definition in *H*, oder allgemeiner, in jedem System,

in dem die Axiome (I 1..3), (L1..4), (K1..6), (S1,2) gelten, einen Abstand mit den

folgenden Eigenschaften ergibt:

.
.
.
.
.
.
.
.
.

3.3 Das Doppelverhältnis und die Längenmessung in der hyperbolischen Ebene 121

(i) Zwei Strecken *z* 1 *z* 2 und *z z* sind genau dann kongruent, wenn

1 2

$d(z_1, z_2) = d(z_1, z_2)$.

1

2

(ii) $d(z_1, z_3) = d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3) \Longleftrightarrow z_2$ liegt zwischen z_1 und z_3.

(iii) $d(z, z) = 0$ für alle $z \in H$.

Wie gesagt, wählen wir nicht die gerade skizzierte synthetische Methode zur De-

finition des Abstands. Wir werden statt dessen eine Formel für d angeben und dann

(i), (ii), (iii) verifizieren.

Eine solche Formel kann man folgendermaßen erraten:

Sind $z_1 = it_1$, $z_2 = it_2$, , $z = it$, $z = it$ mit $0 < t$

$\leq t$ Punkte auf

1

1

2

2

$1 \leq t_2$, $0 < t_1$

2

der hyperbolischen Geraden $g_0 = \{it / t > 0\}$, so sind die Strecken $z_1 z_2$ und $z z$
1 2

t / t

genau dann kongruent, wenn $t_2 = t_2$ (denn die zu der Matrix

1

1

0

t_1

t_1

0

t_1 / t_1

gehörende gebrochen lineare Transformation bildet die Strecke $z_1 z_2$ auf die Strecke

mit Anfangspunkt z und Endpunkt $i t_2 t$ ab). Deswegen liegt es nahe, f

1

ür die Ab-

t_1 1

standsmessung auf der Geraden $g_0 = \{it / t > 0\}$ eine logarithmische Skala zu

verwenden. Tut man dies, d.h. setzt man den Abstand zwischen it und it gleich

$|\log t|$, so ist für Punkte auf der Geraden g

t

0 die obige Bedingung (ii) erfüllt.

Nun kann man diese Abstandsdefinition auf ganz H ausdehnen, indem man für

$z_1, z_2 \in H$ die nach Proposition 28.3 existierende Matrix $A \in SL(2, \mathbb{R})$ ausrechnet,

für die $\phi A(z_1) = i$, $\phi A(z_2) = it$ mit $t \geq 1$. Aus den Koeffizienten von A, z_1 und z_2

berechnet sich t, und man setzt den Abstand zwischen z_1 und z_2 gleich dem Abstand

von i und it, also $\log t$. Dies ergibt dann eine Formel für eine Abstandsmessung auf

der oberen Halbebene.

Wir führen die eben skizzierte Rechnung nicht durch, sondern geben direkt die For-

mel an, die sich aus ihr ergibt, und verifizieren dann (unter anderem) die Eigenschaf-

ten (i), (ii) und (iii). Ausgedrückt wird diese Formel mit Hilfe des *Doppelverh¨*

altnisses

von vier komplexen Zahlen.

Definition 32 *Sind* z_1, z_2, z_3, z_4 *komplexe Zahlen mit* $\{z_1, z_2\} \cap \{z_3, z_4\} = \emptyset$, *so heißt* z

z

DV(z

$1 - z_3$

$1 - z_4$

$1, z_2, z_3, z_4) :=$

:

$z_2 - z_3$

$z_2 - z_4$

das Doppelverhältnis *von* z_1, z_2, z_3, z_4.

..

Ubung: Zeigen Sie:

$DV(z_1, z_2, z_3, z_4) = DV(z_2, z_1, z_3, z_4) - 1 = DV(z_1, z_2, z_4, z_3) - 1$!

Ein wichtiges Hilfsmittel bei der Konstruktion des Abstands ist

Proposition 33 *Seien* z_1, z_2, z_3, z_4 *komplexe Zahlen so, daß* $z_1 = z_3$, $z_1 = z_4$ *und so, daß* z_2, z_3, z_4 *paarweise verschieden sind. Dann ist das Doppelverhältnis von*

z_1, z_2, z_3, z_4 *genau dann reell, wenn die Punkte* z_1, z_2, z_3, z_4 *entweder alle vier auf einem Kreis oder alle vier auf einer Geraden liegen. In Formeln:*

.

$DV(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow$

$\exists z_0 \in \mathbb{C}, r \in \mathbb{R} : |z_j - z_0| = r \ (j = 1, .., 4)$

oder

$\exists a,b,c \in \mathbb{R}, (a,b) = (0, 0) : a \operatorname{Re} z_j + b \operatorname{Im} z_j + c = 0 \ (j = 1, .., 4)$ *Liegen die Punkte* z_1, z_2, z_3, z_4 *auf einem Kreis, so ist das Doppelverhältnis*

$DV(z_1, z_2, z_3, z_4)$ *genau dann positiv, wenn es auf dem Kreis ein Segment zwischen*

z_3 *und* z_4 *gibt, das* z_1 *und* z_2 *nicht trifft (präziser:* z_3 *und* z_4 *gehören zur selben Zusammenhangskomponente des Komplements von* $\{z_1, z_2\}$ *in diesem Kreis). Liegen*

z_1, z_2, z_3, z_4 *auf einer Geraden, so ist* $DV(z_1, z_2, z_3, z_4)$ *genau dann positiv, wenn die Punkte* z_1 *und* z_2 *entweder beide zwischen* z_3 *und* z_4 *liegen oder beide nicht zwischen*

z_3 *und* z_4 *liegen (siehe Bild 3.29).*

z_2

z_1

z_2

z_4

z_0

z_3

z_1

z

z

3

4

Bild 3.29

Wir verschieben den Beweis der Proposition 33 auf später und formulieren zunächst

die Formel für den Abstand von Punkten in der hyperbolischen Ebene.

Ist $g = g_{x,r}$ eine *hyperbolische Gerade aus dem System* G_2, das heißt

$g =$

$z \in H \; |z - x| = r$

für ein $x \in \mathbb{R}$ und ein $r > 0$

und sind $z_1, z_2 \in g$ mit $\operatorname{Re} z_1 < \operatorname{Re} z_2$, so setze (siehe Bild 3.30)

$d(z_1, z_2) := |\log DV(z_1, z_2, x - r, x + r)|$

(3.12)

Da $x - r$, z_1, z_2 und $x + r$ auf einem Kreis liegen, und die *hyperbolische Strek-*

ke zwischen z_1 und z_2 weder $x - r$ noch $x + r$ trifft, ist nach Proposition 33 die Zahl $DV(z_1, z_2, x - r, x + r)$ reell und positiv. Es macht somit Sinn, den natürlichen

Logarithmus dieser Zahl zu bilden. Man sieht leicht (z.B. aus der obigen Übung),

daß

.

.

.

z_2

z_1

g

Re z

$x - r$

x

$x + r$

Bild 3.30

$d(z_1, z_2) = |\log DV(z_1, z_2, x - r, x + r)|$

=

$| \log DV(z_1 ,z_2 ,x + r,x - r) |$

(3.13)

$=$

$| \log DV(z_2 ,z_1 ,x - r,x + r) | = d(z_2 ,z_1)$

Ist $g = g\alpha$ eine hyperbolische Gerade *aus dem System* G_1, das heißt

$g = \{z \in H \mid \mathrm{Re}\, z = \alpha\}$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}$

so setze für $z_1 ,z_2 \in g$

z

$d(z$

$1 - \alpha$

$1 ,z_2) := \log$

(3.14)

$z_2 - \alpha$

Man beachte, daß in diesem Fall $z_1 - \alpha$ und $z_2 - \alpha$ beide rein imaginär mit positivem

Imaginärteil sind, so daß $z_1 -\alpha$ reell und positiv ist. Ferner gilt wieder, daß $d(z$

$z_2 -\alpha$

$1 ,z_2) =$

$d(z_2 ,z_1)$.

Nach (I 1) liegen je zwei verschiedene Punkte von H auf genau einer hyperboli-

schen Geraden, also definieren (3.12) und (3.14) eine Funktion $d : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$.

Diese Funktion ist die analytische Beschreibung des Abstands auf H.

Satz 3.4 *Die oben definierte Funktion* $d : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ *erfüllt*

1. $d(z_1, z_2) \geq 0$ *, und* $d(z_1, z_2) = 0$ *genau dann, wenn* $z_1 = z_2$.

2. $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$.

3. $d(z_1, z_3) \leq d(z_2, z_1) + d(z_2, z_3)$. *Gleichheit der beiden Ausdrücke liegt genau dann vor, wenn* z_2 *zwischen* z_1 *und* z_3 *liegt (d.h.* $(z_1, z_2, z_3) \in Z$*) oder* $z_1 =$

z_2 *oder* $z_2 = z_3$.

4. Sind $z_1, z_2, z, z \in H$*, so ist* $d(z$

$, z)$ *genau dann, wenn es* $A \in$

1

2

$1, z_2) = d(z_1$ 2

$SL(2, \mathbb{R})$ *gibt, so daß* $\phi A(z_1) = z$ *und* ϕ

(d.h. wenn die Strecken

1

$A(z_2) = z_2$

$z_1 z_2$ *und* $z z$ *kongruent sind).*

1 2

Bemerkung 34 Die Teile *1*, *2* und *3* des Satzes implizieren, daß d eine *Metrik* auf H im Sinne der Topologie ist (vgl. z.B. [Forster] 2, § 1).

.
.
.
.
.
.

Bevor wir uns dem Beweis von Proposition 33 und Satz 3.4 zuwenden, bemerken

wir, daß Formel (3.14) ein Grenzfall der Formel (3.12) ist.

Lemma 35 *F¨*

ur zwei Punkte $z_1, z_2 \in H$ *mit* $\mathrm{Re}\, z_1 = \mathrm{Re}\, z_2$ *und* $\mathrm{Im}\, z_1 < \mathrm{Im}\, z_2$ *ist:*

$d(z_1, z_2) = \lim$ $d(z$

$t \to 0$

$1, z_2 + t)$

$t \in IR$

Beweis Wir prüfen Lemma 35 in dem Spezialfall nach, daß $\mathrm{Re}\, z_1 = \mathrm{Re}\, z_2 = 0$ und

daß der Limes $t \to 0$ mit $t > 0$ genommen wird. Der Beweis im allgemeinen Fall ist

ganz ähnlich. Es bezeichne $g(t)$ die hyperbolische Gerade durch die Punkte z_1 und

Im z

$g(0)$

z_2

$g(t)$

$z\ 2 + t$

$z\ 1$

$r(t)$

Re z

$x(t) - r(t)$

$x(t)$

$x(t) + r(t)$

Bild 3.31

$z\ 2 + t$. Dann ist $g(0) = \{z \in H \mid \text{Re } z = 0\}$, während für $t > 0$ (siehe Bild 3.31) $g(t) =$

$z \in H\ |z - x(t)| = r(t)$

mit

$t\ 2 + (\text{Im } z$

$x(t) :=$

$2)2 - (\text{Im } z\ 1)2$, $r(t) :=$

$(\text{Im } z$

$2\ t$

$1)2 + x(t)2$

Es gilt $\lim(x(t) - r(t)) = 0$ und $\lim x(t) = \infty = \lim(x(t) + r(t))$, und somit t

0

t

0

t

0

lim DV(z 1 ,z 2 + t,x(t) − r(t) ,x(t) + r(t))

t

0

z

z

=

lim

1 − (x(t) − r(t))

:

1 − (x(t) + r(t))

t

0

z 2 + t − (x(t) − r(t)) z 2 + t − (x(t) + r(t)) z

z

=

lim

1 − (x(t) − r(t))

: lim

$1 - (x(t) + r(t))$

t

$0 z 2 + t - (x(t) - r(t))$

t

$0 z 2 + t - (x(t) + r(t))$

z

z

$=$

$1 : 1 = 1$

$z 2$

$z 2$

.
.
.
.
.
.
.
.

Daraus folgt Lemma 35 durch Bilden des Logarithmus.

✷

Zum Beweis von Proposition 33 und Satz 3.4 holen wir etwas weiter aus. Die obige

Überlegung zeigt, das in gewissem Sinne die hyperbolische Gerade $g(0)$ ein Grenzfall

der hyperbolischen Geraden $g(t)$ ist, und daß einer der Fußpunkte“ dieser Geraden

”

beim Grenzübergang gegen Unendlich strebt“. Dies ist eine Motivation dafür, den

”

Zahlbereich zu erweitern um einen Punkt, den wir ∞ nennen wollen.

Definition 36 ∞ *sei ein neues Symbol. Wir nennen die Menge* $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ *die* Rie-

mann’sche Zahlenkugel *und bezeichnen sie mit* $\mathbb{P}1\mathbb{C}$.

Die Einführung des Symbols ∞ bietet viele praktische Vorteile. Einer davon ist,

daß die Probleme bei der Beschreibung des Definitions- und des Wertebereichs ge-

brochen linearer Transformationen wegfallen.

a

b

Bemerkung 37 Ist $A =$

$\in GL(2, \mathbb{C})$, so ist

c

d

$\mathbb{P}1\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{P}1\mathbb{C}$

⎧

⎨ $az + b$, $z = -d/c, \infty$

$cz + d$

z

$- \to$ ⎩ ∞,

$z = -d/c$ oder $z = \infty$, $c = 0$

a/c ,

$z = \infty$, $c = 0$

eine Bijektion von P1C auf sich. Wir bezeichnen sie (mit leicht mißbräuchlicher Schreibweise) wieder mit ϕA. Wie in Abschnitt 3.2 verifiziert man, daß

$\phi AB = \phi A \circ \phi B$, $(\phi A) - 1 = \phi A - 1$, $\phi 11 = id$

Jetzt müssen wir uns bei diesen Formeln keine Gedanken mehr über Definitions- und Wertebereich machen.

Auch die Definition des Doppelverhältnisses läßt sich erweitern. Sind z 1, z 2, z 3,

z 4 Punkte auf der Riemann'schen Zahlenkugel P1C, so daß $\{z 1 , z 2 \} \cap \{z 3 , z 4 \} = \emptyset$, so setze

⎧

⎪

⎪ $z 1 - z 3$

⎪

: $z 1 - z 4$

(z

│ z

z

1 ,z 2 ,z 3 ,z 4 = ∞)

│ 2 −z 3

2 −z 4

│

│

z

│

1 −z 3

(z

│

4 = ∞ und z 1 ,z 2 ,z 3 = ∞)

│

z 2 −z 3

⎨

z 2 −z 4

(z 3 = ∞ und z 1 ,z 2 ,z 4 = ∞)

DV(z

z 1 −z 4

1 ,z 2 ,z 3 ,z 4) := │

$\Big|$

$\Big|$

$z_1 - z_3$

$\Big|$

$(z$

$\Big|$

z

$2 = \infty$ und $z_1, z_3, z_4 = \infty)$

$\Big|$

$1 - z_4$

$\Big|$

$\Big|$

z

$\Big|$

$2 - z_4$

$(z$

$\Big|$

$1 = \infty$ und $z_2, z_3, z_4 = \infty)$

$\Big\lfloor$

$z_2 - z_3$

1

($z_1 = z_2 = \infty$ oder $z_3 = z_4 = \infty$)

Proposition 38 (Invarianz des Doppelverhältnisses unter gebrochen linearen Trans-

formationen)

Sind $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{P}1\mathbb{C}$, *so daß* $\{z_1, z_2\} \cap \{z_3, z_4\} = \emptyset$, *und ist* $A \in GL(2, \mathbb{C})$, *so ist* $\mathrm{DV}(z_1, z_2, z_3, z_4) = \mathrm{DV}(\phi A(z_1), \phi A(z_2), \phi A(z_3), \phi A(z_4))$

.

Beweis Natürlich läßt sich Proposition 38 einfach durch Einsetzen der Definitio-

nen beweisen. Wir geben einen etwas eleganteren Beweis. Dazu definieren wir die

folgenden Teilmengen von $GL(2, \mathbb{C})$:

1

t

$P+ :=$

$t \in \mathbb{C}$

0

1

1

0

$P- :=$

$t \in \mathbb{C}$

(3.15)

t

1

a

0

T

:=

$a,d \in \mathbb{C}$,$ad = 0$

0

d

..

Ubung: Zeigen Sie, daß $P+$, $P-$ und T Untergruppen von $GL(2, \mathbb{C})$ sind!

Der *Gauß'sche Algorithmus* impliziert nun, daß sich jede Matrix

a

b

$A =$

$\in GL(2, \mathbb{C})$ mit $a = 0$

c

d

in der Form

$A = LDR$ mit $L \in P-$, $D \in T$, $R \in P+$

(3.16)

schreiben läßt. In der Tat, eine Zeilenumformung (Subtraktion des c/a-fachen der

a

b

ersten Zeile von der zweiten) führt A in eine Matrix der Form

über. Dieser

0

d

1

0

Zeilenumformung entspricht Linksmultiplikation mit dem Element

−

von

c/a

1

$P-$. Nennen wir dieses Element $L-1$, so ist

a

b

$L-1\,A =$

0

d

a

b

a

0

Da det $L = 1$, ist $a\ d =$ det

$=$ det $A = 0$. Setze $D :=$

. Dann ist

0

d

0

d

1

$b\ /a$

$R := D^{-1}\ L^{-1}\ A = D^{-1}\ a$

b

$=$

$\in P$

0

d

0

1

+

Offenbar ist $A = LDR$.

a

b

Ebenso ist jede Matrix $A =$

$\in SL(2\ ,\ \mathrm{C})$ mit $a = 0$ von der Form

c

d

0

1

$A = J\ DR$ mit $J :=$

$,\ D \in T\ ,\ R \in P$

1

0

+ .

(3.17)

Da $\phi AB = \phi A \circ \phi B$ für alle $A,B \in GL(2\ ,\ \mathrm{C})$, genügt es, Proposition 38 für den Fall

nachzuprüfen, daß $A \in P+$ oder $A \in P-$ oder $A \in T$ oder $A = J$, denn jede Matrix

läßt sich als Produkt von solchen Matrizen schreiben. Wir können den Bereich der

Matrizen, für den wir Proposition 38 nachzuprüfen haben, noch weiter einschränken:

1

0

Für jede Matrix $L =$

$\in P$

t

1

$-$ gilt

.

.

1

t

$L = J$

J ,

0

1

das heißt, salopp geschrieben,

$P- = \{J\} \circ P+ \circ \{J\}$

Deshalb genügt es nun, Proposition 38 nur im Fall $A \in P+$ oder $A \in T$ oder $A = J$

1

t

nachzuprüfen. Für $A =$

$\in P$

0

1

+ ist

$z + t$

falls $z = \infty$

$\phi A(z) =$

∞

falls $z = \infty$,

a

0

und Proposition 38 ist trivial. Falls $A =$

$\in T$, so ist

0

d

$a\ z$ falls $z = \infty$

ϕ

d

$A(z) =$

∞ falls $z = \infty$,

und wieder ist Proposition 38 trivial. Schließlich ist für $A = J$

$$\phi A(z) = \begin{cases} \infty & \text{falls } z = 0 \\ 0 & \text{falls } z = \infty \\ 1/z & \text{sonst} \end{cases}$$

Wieder ist es einfach, Proposition 38 nachzuprüfen. Damit ist der Beweis von Pro-

position 38 beendet.

✷

Die Zerlegung (3.16), (3.17) der Elemente von $GL(2, \mathbb{C})$ heißt *L-R-Zerlegung* oder

Bruhat-Zerlegung . Sie läßt sich in naheliegender Weise auf invertierbare $(n \times n)$-

Matrizen verallgemeinern ([Brieskorn], 7.4).

Bemerkung 39 Im obigen Beweis haben wir gezeigt, daß sich jedes Element A der

Gruppe $GL(2, \mathbb{C})$ schreiben läßt als Produkt von Matrizen aus $P+$ und T , und der

Matrix J . Dabei können Matrizen mehrmals an verschiedenen Stellen der Produkt-

darstellung auftreten (hier z.B. die Matrix J). Ist allgemein G eine Gruppe, so heißt

eine Teilmenge E von G ein *Erzeugendensystem* von G, falls sich jedes Element von

G in der Form

$g = g\varepsilon_1 \circ g\varepsilon_2 \circ \cdots \circ g\varepsilon_n$

1

2

n

mit $\varepsilon_i \in \mathbb{Z}$, $g_j \in E$ schreiben läßt. Es ist also in unserem Fall

$P_+ \cup T \cup \{J\}$

(3.18)

Erzeugendensystem von $GL(2, \mathbb{C})$.

Von Nutzen beim Rechnen mit Doppelverhältnissen ist das folgende

.

Lemma 40 *Seien* $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{P}_1\mathbb{C}$ *mit* $z_2 = z_3 = z_4 = z_2$. *Dann gibt es eine eindeutig bestimmte gebrochen lineare Transformation* ϕ, *so daß*

$\phi(z_2) = 1, \phi(z_3) = 0, \phi(z_4) = \infty$.

(3.19)

In diesem Fall ist $DV(z_1, z_2, z_3, z_4) = \phi(z_1)$.

Beweis Zunächst beweisen wir die *Existenz* der gebrochen linearen Abbildung ϕ.

Wir definieren Vektoren $v_3, v_4 \in \mathbb{C}^2$ als

$$v_j := \begin{cases} z_j & \text{falls } z_j = \infty \\ 1 & \text{falls } z_j = \infty \end{cases} \qquad v_j := \begin{cases} 1 & \text{falls } z_j = \infty \\ 0 & \text{falls } z_j = \infty \end{cases}$$

Da $z_3 = z_4$, sind die Vektoren v_3, v_4 linear unabhängig in $\mathbb{C}^2$, bilden also eine Basis von $\mathbb{C}^2$. Je zwei Basen von $\mathbb{C}^2$ lassen sich aber durch eine Matrix in $GL(2, \mathbb{C})$ ineinander überführen. Also gibt es $A \in GL(2, \mathbb{C})$, so daß

$$Av_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Av_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe von Bemerkung 27 sieht man, daß $\phi A(z_3) = 0$ und $\phi A(z_4) = \infty$. Dann ist

$\phi A(z_2) = 0, \infty$. Also ist

1

0

$B :=$

$\in GL(2, \mathbb{C})$

0

$\phi A(z_2)$

Dann ist $\phi B(0) = 0$, $\phi B(\infty) = \infty$ und $\phi B(\phi A(z_2)) = 1$. Setzen wir also $\phi := \phi BA$, so ist (3.19) erfüllt. Damit ist die Existenz gezeigt.

Zur *Eindeutigkeit* : Sei ϕ eine weitere gebrochen lineare Abbildung mit

$\phi(z_2) = 1$, $\phi(z_3) = 0$ und $\phi(z_4) = \infty$

Dann ist $\psi := \phi \circ \phi^{-1}$ eine gebrochen lineare Abbildung mit den Fixpunkten 0,

a

b

1 und ∞. Schreibe $\psi = \phi A$ mit $A =$

$\in GL(2, \mathbb{C})$. Da $0 = \psi(0) = b/d$, ist

c

d

$b = 0$. Da $\infty = \psi(\infty)$, ist $c = 0$. Also $1 = \psi(1) = a/d$, d.h. $a = d$. Also ist $A = a \cdot id$ und somit $\psi = \phi A = id$. Dies zeigt, daß $\phi = \phi$.

Schließlich ist für alle $z \in$ P1C

DV(z, 1 , 0 ,∞) = z

Wendet man dies auf $z = \phi(z\ 1)$ an, so ergibt sich die letzte Aussage von Lemma 40

als direkte Konsequenz der in Proposition 38 gezeigten Invarianz des Doppelverhält-

nisses unter gebrochen linearen Transformationen.

✷

.

Korollar 41 *Sind* $z\ 2$,$z\ 3$,$z\ 4$ *paarweise verschieden, so gilt*

DV($z\ 1$,$z\ 2$,$z\ 3$,$z\ 4$) = 1 ⇐⇒ $z\ 1 = z\ 2$,

DV($z\ 1$,$z\ 2$,$z\ 3$,$z\ 4$) = DV(z ,z

1

2 ,$z\ 3$,$z\ 4$) ⇐⇒ $z\ 1 = z\ 1$

Um den Beweis von Proposition 33 vorzubereiten, betrachten wir das System K

von Teilmengen von P1C wie folgt: $K\ 1$ sei das System von Teilmengen der Form

$\{z \in \mathrm{C} \mid a \operatorname{Re} z + b \operatorname{Im} z + c = 0\} \cup \{\infty\}$ mit $a,b,c \in \mathrm{R}$ (a,b) = (0 , 0) und $K\ 2$ sei das System von Teilmengen der Form

$\{z \in \mathrm{C} \mid |z - z\ 0| = r\}$ mit $z\ 0 \in \mathrm{C}$, $r > 0$

$K\ 1$ besteht aus den reellen *Geraden* in C, die um den Punkt ∞ ergänzt wurden. Die

Elemente von K 2 sind die *Kreise* in C. Setze $K := K$ 1 $\cup$ K 2.

Proposition 42 *Gebrochen lineare Transformationen f¨*

uhren Kreise und Geraden

in Kreise oder Geraden ¨

uber, d.h.

$\phi A(\ k) \in K$ *für alle* $k \in K$, $A \in GL(2\ ,$ C)

Beweis Ist E ein Erzeugendensystem von $GL(2\ ,$ C), so genügt es zu zeigen, daß für

$A \in E$ oder $A-1 \in E$ gilt:

$\phi A(\ k) \in K$ für alle $k \in K$

Nach Bemerkung 39 ist $E := P+ \cup T \cup \{J\}$ ein Erzeugendensystem für $GL(2\ ,$ C).

Ferner ist für jedes $A \in E$ auch $A-1 \in E$. Für $A \in P+$ ist ϕA von der Form

$z + t$

falls $z = \infty$

$\phi A(\ z) :=$

∞

falls $z = \infty$

mit $t \in$ C. Offenbar führt eine solche Transformation jedes Element von K 1(bzw.

K 2) wieder in ein Element von K 1(bzw. K 2) über. Dasselbe gilt für Abbildungen ϕA

mit $A \in T$, denn sie sind ja von der Gestalt

λz

falls $z = \infty$

$\phi A(z) :=$

∞ falls $z = \infty$

mit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{ 0 \}$. Schließlich betrachten wir noch den Fall $A = J$, das heißt

$\lceil$

$\{ \infty$

falls $z = 0$

$\phi A(z) := \lfloor 0$

falls $z = \infty$

$1/z$

sonst

Sei zunächst

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

k

$=$

$\{z \in \mathrm{C} \mid a \operatorname{Re} z + b \operatorname{Im} z + c = 0\} \cup \{\infty\}$

$=$

$\{z \in \mathrm{C} \mid (a + ib) z + (a - ib) z + 2c = 0\} \cup \{\infty\}$

ein Element von K 1 ($a,b,c \in \mathrm{R}$, $(a,b) = (0, 0)$). Ist $c = 0$, so ist

$\phi J(k)$

$=$

$\{z \in \mathrm{C} \mid (a + ib) z + (a - ib) z + 2czz = 0\}$

$(a - ib)$

$(a - ib)$

$=$

$z \in \mathrm{C}$

$z +$

$=$

$2c$

$2c$

ein Element von K 2. Für $c = 0$ ist

$\phi J (k)$

$=$

$\{z \in \mathrm{C} \mid (a + ib) z + (a - ib) z = 0 \} \cup \{\infty\}$

$=$

$\{z \in \mathrm{C} \mid a \operatorname{Re} z - b \operatorname{Im} z = 0 \} \cup \{\infty\}$

ein Element von K 1. Nun sei

$k = \{z \in \mathrm{C} \mid |z - z 0 | = r\} = \{z \in \mathrm{C} \mid zz - z 0 z - z 0 z + z 0 z 0 - r 2 = 0 \}$

ein Element von K 2. Ist $|z 0 | = r$, so ist

$\phi J (k)$

$=$

$\{z \in \mathrm{C} \mid (|z 0 | 2 - r 2) zz - z 0 z - z 0 z + 1 = 0 \}$

z

r

$=$

$z \in \mathrm{C}$

$z -$

0

$|$

$=$

$z 0 | 2 - r 2$

$| |z_0|^2 - r^2|$

wieder ein Element von K_2. Ist $|z_0| = r$, so ist

$\phi A(k) = \{z \in \mathbb{C} \mid z_0 z_0 + z_0 z_0 - 1 = 0\} \cup \{\infty\}$

ein Element von K_1. Damit ist Proposition 42 bewiesen.

✷

Bemerkung 43 Im Beweis von Proposition 42 war der wesentliche Schritt, zu zei-

gen, daß die Abbildung $z \to \frac{1}{z}$ Kreise und Geraden auf Kreise oder Geraden abbildet.

Wie zu Beginn von Abschnitt 3.2 bemerkt, ist die Inversion am Einheitskreis die Hin-

tereinanderschaltung der Spiegelung an der reellen Achse und der Abbildung $z \to \frac{1}{z}$.

Offenbar bildet die Spiegelung an der reellen Achse Kreise auf Kreise und Geraden

auf Geraden ab. Folglich bildet auch die Inversion am Einheitskreis Kreise und Ge-

rade auf Kreise oder Geraden ab. Umgekehrt kann man Proposition 42 beweisen

, wenn man weiß, daß (3.18) ein Erzeugendensystem von $GL(2, \mathbb{C})$ ist, und zeigen

kann, daß die Inversion am Einheitskreis die Eigenschaft hat, Kreise und Geraden

auf Kreise oder Geraden abzubilden. Am Ende dieses Abschnitts skizzieren wir

in

zwei Übungen einen geometrischen Beweis für die letztgenannte Tatsache.

Bemerkung 44 Wir verwenden Proposition 42, um einen zweiten Beweis von Pro-

position 29. *1* zu geben, die besagt, daß gebrochen lineare Transformationen ϕA mit

$A \in SL(2\ ,\ \mathrm{R})$ hyperbolische Geraden wieder in hyperbolische Geraden überführen.

Dazu bemerken wir zunächst, daß $G\ 1$ aus den Schnitten $\cap\ H$ besteht, wobei über

alle von der reellen Achse verschiedenen Geraden läuft, die symmetrisch bezüglich

Spiegelung an der reellen Achse sind und nicht mit der reellen Achse übereinstim-

men.

In anderen Worten:

.
.
.
.
.
.

$G\ 1 = \{\ \cap\ H\ /\ \in K\ 1\ ,\ =\ ,\ = \mathrm{R} \cup \{\ 0\ \}\}$

Ebenso ist

$G\ 2 = \{k \cap H\ /\ k \in K\ 2\ ,\ k = k\}$

Jede hyperbolische Gerade g läßt sich also in der Form

$g = k \cap H$

mit $k \in K1 \cup K2$, $k = k$, $k = \mathrm{R} \cup \{\infty\}$ schreiben. Ist $A \in SL(2, \mathrm{R})$, so ist nach Proposition 42 $\phi A(k) \in K1 \cup K2$. Außerdem ist nach Proposition 28. *1* auch $\phi A(H) =$

H. Somit ist

$\phi A(g) = \phi A(k) \cap H$

und

$\phi A(k) = \mathrm{R} \cup \{\infty\}$

Da A reelle Koeffizienten hat, ist auch

$\phi A(k) = \phi A(k) = \phi A(k)$

Deshalb ist $\phi A(g) \in G$.

✷

Wir kommen nun endlich zum

Beweis von Proposition 33:

Nach Lemma 40 gibt es eine gebrochen lineare

Transformation ϕ so daß $\phi(z2) = 1$, $\phi(z3) = 0$, $\phi(z4) = \infty$, und es gilt $DV(z1, z2, z3, z4) = \phi(z1)$. Die Punkte $z1, z2, z3, z4$ liegen nach Proposition 42 genau dann auf einem Kreis oder einer Geraden, wenn die Punkte $\phi(z1)$, $\phi(z2) = 1$, $\phi(z3) =$

0, $\phi(z4) = \infty$ alle auf einem Element von K liegen. Das einzige Element von K, das

die drei Punkte $0, 1, \infty$ enthält, ist die komplettierte“ reelle Achse

„

$\mathbb{R} \cup \{\infty\} := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = 0\} \cup \{\infty\}$

$\phi(z_1)$ liegt genau dann auf $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$,wenn $\phi(z_1)$ reell ist, d.h. genau dann, wenn

$DV(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}$. Damit ist der erste Teil der Proposition bewiesen. Schließlich

trifft die Strecke zwischen $\phi(z_1)$ und $\phi(z_2) = 1$ die Punkte $\phi(z_3) = 0$ und $\phi(z_4) = \infty$

genau dann nicht, wenn $\phi(z_1) = DV(z_1, z_2, z_3, z_4) > 0$.

✷

Mit Proposition 33 ist garantiert, daß die Definition des Abstandes auf H, die wir

in (3.12) resp. (3.14) gegeben haben, sinnvoll ist. Man beachte, daß die in (3.14) für

den Fall $\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 = \alpha$ gegebene Definition auch in der Form

$$d(z_1, z_2) = |\log DV(z_1, z_2, \alpha, \infty)|$$

(3.20)

geschrieben werden kann.

✷

Beweis von Satz 3.4 Nach Definition ist $d(z_1, z_2) \geq 0$ für alle $z_1, z_2 \in H$. Daß $d(z_1, z_2) = 0$ genau dann, wenn $z_1 = z_2$, folgt direkt aus (3.12), (3.20) und Korollar

41. Weiter wurde bereits in (3.13) und (3.14) gezeigt, daß $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$. Damit sind die Teile *1* und *2* von Satz 3.4 bereits bewiesen.

Wir beweisen nun zunächst Aussage *4*. Seien also $z_1, z_2, z, z \in H$. Im Fall, daß

1

2

$z_1 = z_2$ oder $z = z$, ist die Aussage trivial. Sei also z

$= z$. Dann gibt

1

2

$_1 = z_2$ und z_1

2

es eindeutig bestimmte hyperbolische Geraden g, g, sodaß $z_1, z_2 \in g$ und $z, z \in g$.

1

2

Die Mengen g bzw. g sind Halbkreise oder Halbgeraden, also gibt es eindeutig

bestimmte Elemente $k, k \in K$, so daß $g \subset k$ und $g \subset k$. Seien w_1, w_2 resp. w, w

1

2

die Schnittpunkte von k bzw. k mit der komplettierten reellen Achse $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Gemäß Definition und (3.20) ist (siehe Bild 3.32)

$d(z_1, z_2) = |\log DV(z_1, z_2, w_1, w_2)|$, $d(z, z) = |\log DV(z, z, w, w)|$

1

2

1

2

1

2

z 2

z

g

2

z 1

g

z 1

Re z

w 1

w 2

w 1

k

k

($w = \infty$)

2

Bild 3.32

Gibt es $A \in SL(2, \mathbb{R})$ mit $\phi A(z_1) = z$ und ϕ

, so ist

1

$A(z_2) = z_2$

$\phi A(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

und somit $\phi A(\{w_1, w_2\}) = \{w, w\}$. Damit folgt mit Proposition 38, daß $d(z$

1

2

$_1, z_2) =$

$d(z, z)$. Wir nehmen nun umgekehrt an, daß $d(z$

$, z)$. Indem wir – falls

1

2

$_1, z_2) = d(z_1$ 2

nötig – w und w vertauschen, k

1

2

önnen wir annehmen, daß

$DV(z_1, z_2, w_1, w_2) = DV(z, z, w, w)$

1

2

1

2

.

Nach Proposition 29. *3* gibt es $A \in SL(2, \mathbb{R})$ mit $\phi A(z_2) = z$ und so, daß ϕ

2

A den

Strahl von z_1 aus in Richtung w_1 auf den Strahl von z aus in Richtung w abbildet.

1

1

Dann ist $\phi A(w_1) = w$ und somit auch ϕ

. Also folgt mit Proposition 38:

1

$A(w_2) = w_2$

$DV(z, z, w, w)$

=

$DV(z$

1

2

1

2

1 ,z 2 ,w 1 ,w 2)

=

DV(ϕA(z 1) ,ϕA(z 2) ,ϕA(w 1) ,ϕA(w 2))

=

DV(ϕA(z 1) ,z ,w ,w) .

2

1

2

Aus Korollar 41 folgt nun, daß $z = \phi$

1

A(z 1). Damit ist Teil *4* von Satz 3.4 bewiesen.

Es bleibt, Teil *3* zu beweisen. Seien also z 1 ,z 2 ,z 3 $\in H$. Der Fall z 1 = z 3 ist trivial. Wir betrachten also die Situation z 1 = z 3. Wegen Proposition 29. *3* können

wir annehmen, daß z 1 = i, z 3 = it mit $t > 1$. Dann ist d(z 1 ,z 3) = log t. Wir unterscheiden zwei Fälle.

1. Fall : z 2 liegt auf der imaginären Achse, das heißt z 2 = it mit $t > 0$. In dem Fall, daß $1 \leq t \leq t$, d.h., daß z 2 zwischen z 1 und z 3 liegt oder daß entweder z 1 = z 2 oder z 2 = z 3, ist

d(z 1 ,z 2) = log t , d(z 2 ,z 3) = log(t/t)

Damit folgt, daß d(z 1 ,z 3) = d(z 1 ,z 2) + d(z 2 ,z 3). Im Fall $t < 1$ ist d(z 1 ,z 2) = − log t , d(z 2 ,z 3) = log(t/t)

und somit

$d(z_1, z_3) = \log t < \log t - 2 \log t = -\log t + \log(t/t) = d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3)$
Analog argumentiert man im Fall $t > t$.

2. Fall : $\operatorname{Re} z_2 = 0$. Wir setzen $z := z$

2

2 − Re z 2 (siehe Bild 3.33).

Im z

$z_3 = it$

$z = z$

z

2

2 − Re z 2

2

$z_1 = i$

Re z

Bild 3.33

Nach dem, was wir für den 1. Fall bewiesen haben, ist

$d(z_1, z_3) \leq d(z_1, z) + d(z, z$

2

2

3)

Es genügt also zu zeigen, daß

$d(i,z) < d(i,z$

2

2)

(3.21)

und

$d(z\ 3 ,z) < d(z$

2

$3 ,z\ 2)$.

(3.22)

Beweisen wir zunächst (3.21). In dem Fall, daß Im $z\ 2 = 1$, ist die Aussage trivial

(denn $z\ 1 = i$). Wir betrachten den Fall, daß Im $z\ 2 > 1$; der Fall Im $z\ 2 < 1$ kann dann analog behandelt werden. Nach Proposition 29. *3* gibt es genau einen Punkt $z = i\tau$

2

mit $\tau > 1$, so daß die Strecken $z\ 1\ z$ und z

2

$1\ z\ 2$ kongruent sind (siehe Bild 3.34).

Im z

$z = i\tau$

2

z

z

2

2

z 1 = i

Re z

Bild 3.34

Nach dem bereits bewiesenen Teil *4* von Satz 3.4 ist d(z 1 ,z 2) = d(z 1 ,z). Wir
m 2

üssen

also zeigen, daß d(z 1 ,z) > d(z

), oder, was

2

1 ,z 2

äquivalent ist, daß τ > Im z 2. Da die

Strecken z 1 z und z

2

1 z 2 kongruent sind, gibt es ein $A \in SL$(2 , R) so daß ϕA(z 1) = z 1

und ϕA(z) = z

2

2. A liegt in der Stabilisator-Untergruppe von z 1 = i, ist also nach

Proposition 28. *2* von der Gestalt

a

$-b$

$A =$

mit a 2 + b 2 = 1

b

a

Die Gleichung $\phi A(z) = z$

2

2 bedeutet

$ai\tau - b = z$

$bi\tau + a$

2

oder

.

.

.

.

.

.

.

.

$ab(\tau 2 - 1)$

$a 2 + b 2$

$+$

$i\tau = \mathrm{Re}\, z$

$a 2 + b 2 \tau 2$

$a 2 + b 2 \tau 2$

$2 + i\, \mathrm{Im}\, z 2$

Wegen $a 2 + b 2 = 1$ folgt für den Imaginärteil:

1

$\mathrm{Im}\, z 2 =$

τ

$1 + b 2(\tau 2 - 1)$

Da $b = 0$ und $\tau > 1$, ist $\mathrm{Im}\, z 2 < \tau$.

Schließlich beweisen wir noch (3.22). Setze

$\sqrt{}$

$1 / t$

0

$B :=$

$\sqrt{}$

$\in SL(2 , \mathrm{R})$

0

t

Dann ist

$\phi B(z\ 3) = i$

$\phi B(z\ 2) = z\ 2\ /t$

$\phi B(z\ ) = z$

2

$2\ /t = i$ Im $\phi B\ (z\ 2)$

Aus (3.21) folgt, daß

$d(\phi B(z\ 3)\ ,\phi B(z\ )) < d(\phi$

2

$B\ (z\ 3)\ ,\phi B\ (z\ 2))$

Da nach dem bereits bewiesenen Teil *4* des Satzes die Abbildung ϕB den Abstand

erhält, folgt die behauptete Gleichung (3.22).

✷

..

Ubung: Zeigen Sie, daß

$P+ \cap SL(2\ , \mathrm{R}) \cup T \cap SL(2\ , \mathrm{R}) \cup$

0

− 1

1

0

ein Erzeugendensystem von $SL(2\ ,\ \mathrm{R})$ ist!

Die folgenden beiden Übungen ergeben einen geometrischen Beweis der Tatsache,

daß die Inversion am Einheitskreis die Eigenschaft hat, Kreise und Geraden in Kreise

oder Geraden zu überführen (vgl. die Bemerkung nach Proposition 42).

..

Ubung: Sei k ein Kreis in R2 mit Mittelpunkt m und $p \in$ R2 , $p = m$ ein Punkt, der nicht auf k liegt. Mit n und n bezeichnen wir die beiden Schnittpunkte der Geraden

durch p und m mit dem Kreis k (siehe Bild 3.35).

Zeigen Sie:

Ist

eine Gerade durch p, die k in zwei Punkten q,q schneidet, so ist

(siehe Bild 3.35)

$p - q$

$\cdot\ p - q = p - n \cdot p - n$!

Hinweise: Überlegen Sie sich zunächst, daß die Winkel

$n\ q\ n$ und

$n\ q\ n$ rechte

Winkel sind (*Thaleskreis*)! Zeigen Sie, daß die Dreiecke $z\ q\ n$ und $z\ q\ n$ ähnlich sind!

Verwenden Sie dies, um zu sehen, daß $z-n$

$=$

$z-q$

$!$

$z-n$

$z-q$

.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.

q/

q

z

n

m

n/

p

Bild 3.35

Folgern Sie daraus

$p\ q\ n =$

$p\ n\ q$. Verwenden Sie die Ähnlichkeit der Dreiecke

$p\ q\ n$ und $p\ n\ q$!

¨

Ubung: Geben Sie einen geometrischen Beweis dafür, daß die Inversion am Einheits-

kreis $z \to 1\ z$

a)

eine Gerade durch 0 in eine Gerade durch 0,

b)

eine Gerade, die nicht durch 0 geht in einen Kreis durch 0,

c)

einen Kreis durch 0 in eine Gerade, die nicht durch 0 geht, und

d)

einen Kreis, der nicht durch 0 geht in einen Kreis, der nicht durch 0 geht

überführt!

Hinweise: Zu b):

Sei g eine Gerade, die nicht durch 0 geht, und z 0 der Punkt

von g mit minimalem Abstand zu 0. Zeigen Sie, daß für jedes $z \in g$, $z = z$ 0 die

Dreiecke 0 z

1

1

0 z und 0 1

ähnlich sind! Insbesondere ist

0 1

= 90 ◦. Die Punkte

z z 0

z z 0

1 , $z \in g$ liegen auf dem Kreis mit Mittelpunkt 1 und Radius 1

z

2 z 0

2 |z 0 | (Thaleskreis).

Zu c):

Sei k ein Kreis mit Mittelpunkt m = 0 und Radius r = | m |. Mit n bzw.

n bezeichnen wir die Schnittpunkte von k mit der Geraden durch 0 und m. Setzen

Sie

$\rho := | n | \cdot | n |$

Sei nun $z \in k$. Die Gerade durch 0 und z schneidet k in zwei Punkten, z und

z . Nach der vorhergehenden Übung ist $| z | \cdot | z | = \rho$. Es sei $m (z)$ Schnittpunkt

der Geraden durch 0 und m mit der Parallelen zu der Geraden durch z und m, die

durch den Punkt 1 geht.

z

Zeigen Sie, daß $| m (z) | = | m | /\rho$. Dann ist $m = m (z)$ unabhängig von z!

Zeigen Sie, daß $| 1 - m | = r$!

z

ρ

.

.

3.4 Die Winkelmessung in der hyperbolischen Ebene

137

3.4

Die Winkelmessung

in der hyperbolischen Ebene

Ähnlich wie die Streckenmessung kann man auch die Winkelmessung ausgehend

von den Axiomen definieren. Es stellt sich aber heraus, daß das Ergebnis im Poin-

caré-Modell die übliche Winkelmessung ist. Das heißt, der Winkel zwischen zwei

hyperbolischen Strahlen S 1 und S 2 ist der euklidische Winkel zwischen ihren Tan-

gentialvektoren τS und τ

(siehe Bild 3.36).

1

S 2

τS 2

S 2

τS 1

S 1

Re z

Bild 3.36

Wir wollen diese Aussage zunächst präzise formulieren und dann beweisen.

Ist $S = S(z\ 0, z\ 1)$ ein Strahl im Poincaré-Modell der hyperbolischen Ebene, so

definiert man den *Einheits-Tangentialvektor τS an den Strahl S im Anfangspunkt* z 0

folgendermaßen: Wähle differenzierbare Funktionen

$x : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathrm{R}$

$y : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathrm{R}$

t

$\longrightarrow x(t)$

t

$-\to y(t)$

auf einem Intervall $(-\varepsilon,\varepsilon)$ um 0, so daß mit $z(t) := x(t) + iy(t)$ gilt:

(i) $z(0) = z_0$

(ii) $t -\to z(t)$ ist eine Bijektion zwischen $(-\varepsilon,\varepsilon)$ und einer Umgebung $U(z_0)$ von

z_0 auf der hyperbolischen Geraden durch z_0 und z_1.

(iii) $z(t) \in S \Longleftrightarrow t \geq 0$

(iv) $\dot{z}(0) := \dot{x}(0) + i\dot{y}(0) = 0$

Hier steht $\dot{}$ für die Ableitung nach t. Den Einheits-Tangentialvektor τ_S an den

Strahl im Anfangspunkt z_0 definieren wir als

$$\tau_S := \frac{1}{(\dot{x}(0), \dot{y}(0))|\dot{z}(0)|}$$

Damit diese Definition Sinn macht, müssen wir nachprüfen, daß sie unabhängig von

den getroffenen Auswahlen ist, und daß es überhaupt Funktionen x und y wie

oben

gibt. Der zweite Punkt ist einfach: Sei g die hyperbolische Gerade durch $z\,0$ und $z\,1$.

Ist $g \in G\,1$, d.h. $\mathrm{Re}\, z\,0 = \mathrm{Re}\, z\,1$, so setze

.

.

.

.

$x(\,t) := \mathrm{Re}\, z\,0 = \mathrm{Re}\, z\,1$, $y(\,t) := \mathrm{Im}\, z\,0 + t(\,z\,1 - z\,0)$ und wähle ε klein genug. Ist $g \in G\,2$, d.h. $g = z \in H\ |z - m| = r$

für ein $m \in \mathrm{R}$

und ein $r > 0$, so setze

$x(\,t) := \mathrm{Re}\, z\,0 + t(\,\mathrm{Re}\, z\,1 - \mathrm{Re}\, z\,0)$, $y(\,t) :=$

$r\,2 - (\,x(\,t) - m)2$

und wähle wieder ε klein genug. Es ist leicht nachzuprüfen, daß (i)-(iv) erfüllt sind

(siehe Bild 3.37).

Im z

$S(\,z\,0\,,z\,1)$

$z\,1$

z

z

0

1

ε

S(z

y(0)

z

0 ,z 1)

0

g

g

ε

Re z

Re z

Re z 0 = Re z 1

x(0)

Bild 3.37

Um die Unabhängigkeit von den Auswahlen zu überprüfen, seien

~

x : [−~

ε, ~

ε] − → R ,

˜

y : [−˜

ε, ˜

ε] − → R

Funktionen, die ebenfalls die obigen Bedingungen (i)-(iv) erfüllen. Nach (iv) ist

.

$x(0) = 0$ oder ˙

$y(0) = 0$. Wir diskutieren den Fall, daß ˙

$x(0) = 0$. Der Fall ˙

$x(0) = 0$,

.

$y(0) = 0$ ist analog. Nach dem Satz über inverse Funktionen gibt es $\varepsilon 1 > 0$, so daß

$x|(-\varepsilon 1 ,\varepsilon 1)$ umkehrbar ist, mit differenzierbarer Umkehrabbildung $x-1$. Wähle ˜ $\varepsilon 1 > 0$

so daß ˜

$x((-$˜

$\varepsilon 1$, ˜

$\varepsilon 1)) \subset x((-\varepsilon 1 ,\varepsilon 1))$ und setze

f : (−˜

$\varepsilon 1$, ˜

$\varepsilon 1)$ − → $(-\varepsilon 1 ,\varepsilon 1)$

t

$- \to x - 1(\tilde{} x(t))$.

f ist eine differenzierbare Funktion, und $\tilde{}$

$x(t) = x(f(t))$ für alle $t \in (-\tilde{}$

$\varepsilon 1, \tilde{}$

$\varepsilon 1)$. Die

Projektion von g auf die Achse $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = 0\}$ ist injektiv, also ist auch $\tilde{}$

$y(t) =$

$y(f(t))$ für alle $t \in (-\tilde{}$

$\varepsilon 1, \tilde{}$

$\varepsilon 1)$. Aus der Kettenregel folgt nun, daß $\dot{\tilde{}}$

$x(0) = \dot{}$

$f(0) \dot{}$

$x(0)$

und $\dot{\tilde{}}$

$y(0) = \dot{}$

$f(0) \dot{}$

$y(0)$, also $\dot{\tilde{}}$

$z(0) = \dot{}$

$f(0) \dot{}$

$z(0)$. Da $\dot{}$

$z(0) = 0$ und ˙˜

$z(0) = 0$ nach (iv),

muß4 ˙

$f(0) = |$ ˙˜

$z(0) |/|$ ˙ $z(0) |$ sein, und es folgt

4

$f(t)$

Wegen (i)..(iii) haben t und $f(t)$ überall dasselbe Vorzeichen. Daher ist ˙

$f(0) = \lim t \to 0\ t$

positiv.

.

.

.

.

.

3.4 Die Winkelmessung in der hyperbolischen Ebene

139

1

1

(˙˜

$x(0)$, ˙˜

$y(0)) =$

(˙

$x(0)$, ˙

$y(0))$

|˙˜ $z(0)$ |

| ˙ $z(0)$ |

Damit ist gezeigt, daß die Definition des Einheits-Tangentialvektors an S Sinn macht.

Den *Winkel* zwischen zwei hyperbolischen Strahlen $S,S \in H$ mit gemeinsamem

Anfangspunkt z 0 definiert man als

$W (S,S) := \arccos(\tau S \cdot \tau S)$

wobei $\tau S \cdot \tau S$ das Skalarprodukt von τS und τS bezeichnet. Es ist klar, daß $W (S,S) =$

$W (S ,S)$.

¨

Ubung: Seien S, S und S

von z 0 ausgehende Strahlen, so daß S zwischen S und

S liegt. Dann ist $W (S,S) = W (S,S) + W (S ,S)$!

Um zu zeigen, daß die obige Definition eine sinnvolle Winkelmessung für das

Poincaré-Modell der hyperbolischen Ebene ergibt, ist noch nachzuprüfen, daß zwei

Winkel

$P\ QR$ und

$P\ Q\ R$ genau dann kongruent sind, wenn gilt:

$W(S(Q,P),S(Q,R)) = W(S(Q,P),S(Q,R))$

Die Kongruenz von Winkeln haben wir mit Hilfe der Operation von $SL(2, \mathrm{R})$ auf

H definiert. Deshalb, und wegen Axiom (K5), genügt es zu zeigen, daß gebrochen

lineare Transformationen ϕA, $A \in SL(2, \mathrm{R})$, *winkeltreu* sind.

Proposition 45 *Sind S,S hyperbolische Strahlen in H mit gleichem Anfangspunkt,*

und ist $A \in SL(2, \mathrm{R})$ *, so ist* $W(\phi A(S), \phi A(S)) = W(S,S)$.

Diese Proposition ist ein Spezialfall der allgemeinen Aussage, daß beliebige gebro-

chen lineare Transformationen winkeltreu sind. Um sie zu formulieren, geben wir

noch eine Definition.

Definition 46 *Ist* (a,b) *ein Intervall in* R *, so nennt man eine Abbildung* $z : (a,b) \longrightarrow$

C *auch eine* komplexwertige Funktion *auf* (a,b) . *Sei heißt* differenzierbar *, wenn die*

beiden Funktionen $x : t \longrightarrow \mathrm{Re}\, z(t)$ *und* $y : t \longrightarrow \mathrm{Im}\, z(t)$ *differenzierbar sind. Ferner schreiben wir* ˙

$z(t) :=$ ˙

$x(t) + i$ ˙

$y(t)$.

Satz 3.5 (Winkeltreue der gebrochen linearen Transformationen)

Seien $t \longrightarrow zj(t) = xj(t) + iyj(t)$ $(j := 1, 2, 3, 4)$ *differenzierbare*

komplexwertige Funktionen auf dem Intervall $(-\varepsilon,\varepsilon)$ *, so daß* $z_1(0) = z_2(0)$ *und* $z_3(0) = z_4(0)$ *. Gibt es* $A \in GL(2, \mathbb{C})$ *, so daß*

$z_3(t) = \phi A(z_1(t))$ *,* $z_4(t) = \phi A(z_2(t))$ *für alle* $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$ *so sind die Winkel zwischen den durch* $\dot{}$

$z_1(0)$ *und* $\dot{}\, z_2(0)$ *bzw.* $\dot{}\, z_3(0)$ *und* $\dot{}\, z_4(0)$ *beschrie-*

benen Vektoren gleich, das heißt

1

·

$x_1(0)$

1

· $\dot{}\, x_2(0)$

·

x

=

$3(0)$

· $\dot{}\, x_4(0)$

| $\dot{}\, z$

·

y

·

y

·

y

.

y

1(0) || ˙

z 2(0) |

1(0)

2(0)

| ˙ *z* 3(0) || ˙ *z* 4(0) |

3(0)

4(0)

.

.

.

.

.

.

.

.

Es ist klar, daß Proposition 45 direkt aus Satz 3.5 folgt. Satz 3.5 wiederum ist ein

Spezialfall eines Satzes aus der Funktionentheorie über die Winkeltreue holomorpher

Abbildungen ([Remmert], Kap. 2.1), auf den wir hier nicht eingehen wollen. Zum Be-

weis von Satz 3.5 stellen wir einige Rechenregeln für differenzierbare

komplexwertige

Abbildungen zusammen.

Lemma 47 *Seien* $t \longmapsto z(t)$ *und* $t \longmapsto w(t)$ *differenzierbare komplexwertige Funk-*

tionen auf $(-\varepsilon,\varepsilon)$ *. Dann gilt:*

1. Die komplexwertige Funktion $t \longmapsto p(t) := z(t)\,w(t)$ *ist ebenfalls differenzierbar auf* $(-\varepsilon,\varepsilon)$ *, und es ist* $\dot{p}(t) = z(t)\,\dot{}$

$w(t) + \dot{}$

$z(t)\,w(t)$.

2. Ist $z(t) = 0$ *f*

ur alle $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$ *, so ist auch die komplexwertige Funktion*

$t \longmapsto q(t) := 1/z(t)$ *differenzierbar auf* $(-\varepsilon,\varepsilon)$ *, und es ist* $\dot{q}(t) = -\,\dot{}\,z(t)$.

$z(t)2$

a

b

3. Ist $A =$

$\in GL(2, \mathbb{C})$ *so daß* $cz(t) + d = 0$ *für alle* $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$ *, so ist*

c

d

$az(t) + b$

auch die komplexwertige Funktion $f(t) :=$

differenzierbar, und es ist

$cz(t) + d$

.

$f(t) =$

$ad - bc$

.

$z(t)$.

$(cz(t) + d)2$

Beweis

1. Schreibe $z(t) = x(t) + iy(t)$, $w(t) = u(t) + iv(t)$ mit reellwertigen Funktionen x,y,u,v. Dann ist

$p(t) = x(t)\,u(t) - y(t)\,v(t) + i(x(t)\,v(t) + y(t)\,u(t))$ also eine differenzierbare Funktion. Ihre Ableitung ist

.

$p(t)$

$=$

$x(t)$ ˙

$u(t) - y(t)$ ˙ $v(t) + i(x(t)$ ˙ $v(t) + y(t)$ ˙ $u(t)) +$

.

$x(t)\,u(t) -$ ˙ $y(t)\,v(t) + i($ ˙ $x(t)\,v(t) +$ ˙ $y(t)\,u(t))$, was offenbar mit dem behaupteten Wert übereinstimmt.

2. Der Beweis ist analog – mit der Funktion

1

$x(t)$

$y(t)$

$q(t) =$

$=$

$- i$

$x(t) + iy(t)$

$x(t)2 + y(t)2$

$x(t)2 + y(t)2$

3. Die komplexwertige Funktion $az(t) + b = ax(t) + b + iay(t)$ ist auf $(-\varepsilon,\varepsilon)$ differenzierbar. $cz(t) + d$ hat keine Nullstelle und ist ebenfalls differenzierbar,

also ist wegen *2* und *1* die Funktion

1

$f(t) = (az(t) + b)\, cz(t) + d$

differenzierbar. Wenden wir die Rechenregeln aus *1* und *2* an, so ergibt sich:

.
.
.
.
.
.
.

3.4 Die Winkelmessung in der hyperbolischen Ebene

141

.

1

c ·

$z(t)$

$f(t)$

$=$

a ·

$z(t)$

$-(az(t)+b)$

$cz(t)+d$

$(cz(t)+d)2$

$acz(t)+ad$

$acz(t)+bc$

$ad-bc$

$=$

$-$

·

$z(t)=$

·

$z(t)$,

$(cz(t)+d)2$

$(cz(t)+d)2$

$(cz(t)+d)2$

wie behauptet.

✷

Beweis von Satz 3.5

a

b

$A =$

$\in GL(2, \mathbb{C})$ habe die angegebenen Eigenschaften. Dann folgt mit Lem-

c

d

ma 47. 3

$\det A$

.

$z_3(0) = \lambda \cdot z_1(0)$ und $\cdot z_4(0) = \lambda \cdot z_2(0)$, wo $\lambda := (cz_1(0) + d)^2$

Schreibe $\lambda = re^{i\phi} = r(\cos\phi + i\sin\phi)$ mit $r > 0$, $\phi \in \mathbb{R}$; also

.

$x_3(0)$

$\cos\phi$

$-\sin\phi$

.

x

.

x

$\cos \phi$

$- \sin \phi$

.

x

$= r$

$1(0)$

,

$4(0)$

$= r$

$2(0)$

.

y $3(0)$

$\sin \phi$

$\cos \phi$

.

y $1(0)$

.

y $4(0)$

$\sin \phi$

$\cos \phi$

.

y 2(0)

cos ϕ

− sin ϕ

Die Matrix

beschreibt die Drehung um den Winkel ϕ. Das Skalar-

sin ϕ

cos ϕ

produkt von Vektoren bleibt unter einer Drehung erhalten. Also ist

.

x 3(0) · ˙ x 4(0) = r 2 ˙ x 1(0) · ˙ x 2(0)

.

y 3(0)

.

y 4(0)

.

y 1(0)

.

y 2(0)

Andererseits ist

| ˙ z 3(0) | = r| ˙ z 1(0) | und | ˙ z 4(0) | = r| ˙ z 2(0) |

und es folgt Satz 3.5.

✷

Wir sind nun in der Lage, den Satz, daß die Winkelsumme in einem hyperboli-

schen Dreieck stets kleiner als 180 ◦ ist, zu formulieren und zu beweisen. Der Beweis

wird jedoch einfacher, wenn wir zu einem anderen Modell der hyperbolischen Ebe-

ne übergehen, dem Poincaré'schen *Scheibenmodell*. Hier ist die zugrundeliegende

Punktmenge das Innere des Einheitskreises

$E :=$

$z \in \mathrm{C}\ |z| < 1$

und das System G von Geraden besteht aus

1. den Mengen $k \cap E$, wobei $k \in K\ 1$ eine Gerade durch 0 ist,

2. den Mengen $k \cap E$, wobei $k \in K\ 2$ ein Kreis ist, der den Einheitskreis

$S\ 1 :=$

$z \in \mathrm{C}\ |z| = 1$

senkrecht schneidet (siehe Bild 3.38).

E

0

S 1

$k \in K$ 2

$k \in K$ 1

Bild 3.38

Die Relation zwischen“ definiert man auf die naheliegende Weise, und Kongruenz

”

definiert man mit Hilfe gebrochen linearer Abbildungen ϕB, wobei B in der Unter-

gruppe

1

0

1

0

SU (1 , 1) :=

$A \in GL$(2 , C) A

A

=

, det $A = 1$

0

− 1

0

− 1

von $GL(2, \mathbb{C})$ liegt.

..

Ubung: Zeigen Sie:

a) $SU(1, 1)$ ist eine Untergruppe von $GL(2, \mathbb{C})$!

a

b

b) $SU(1, 1) =$

$a,b \in \mathbb{C}, |a|^2 - |b|^2 = 1$!

b

a

Daß die oben skizzierte Konstruktion wirklich ein Modell der hyperbolischen Ebe-

ne ergibt, und daß dieses Modell isomorph ist zu dem in Abschnitt 3.2 beschriebenen

Poincaré-Modell, sieht man folgendermaßen:

Es sei

1

1

$-i$

$C := \sqrt{2}\ 1$

i

Die gebrochen lineare Abbildung

$z - i$

$\Phi := \phi C : z \longrightarrow z + i$

heißt die *Cayley-Transformation*. Gemäß Bemerkung 37 ist Φ eine Bijektion der Riemann'schen Zahlenkugel P1C auf sich, und es gilt

$1 + z$

$\Phi - 1(z) = \phi C - 1(z) = i\ 1 - z$

.

.

.

.

3.4 Die Winkelmessung in der hyperbolischen Ebene

143

Satz 3.6

1. Die Cayley-Transformation Φ *bildet die komplettierte reelle Achse* $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *bijektiv auf den Einheitskreis* S^1 *und die obere Halbebene* H *bijektiv auf das Innere* E *von* S^1 *ab. Es ist* $\Phi(i) = 0$.

1

$-i$

2. $SU(1, 1)$ *und* $SL(2, \mathbb{R})$ *sind vermöge* $C := 1$

√

konjugierte Untergrup-

2 1

i

pen von GL(2 , C) *– das heißt:*

SU (1 , 1) = *{CA C*− 1 | *A* ∈ *SL*(2 , R) *}*

3. F¨

ur jedes B ∈ *SU* (1 , 1) *induziert ϕB eine Bijektion von E auf sich. Ist g* ∈ *G ,*

so ist auch ϕB(*g*) ∈ *G .*

4. F¨

ur jedes g ∈ *G ist* Φ(*g*) ∈ *G , und für jedes g* ∈ *G ist* Φ − 1(*g*) ∈ *G.*

Beweis

1. Zunächst ist aus der folgenden Skizze ersichtlich, daß für $z \in \mathbb{C}$ gilt (siehe Bild

3.39):

$|z + i| > |z - i| \Longleftrightarrow \operatorname{Im} z > 0$, $|z + i| = |z - i| \Longleftrightarrow \operatorname{Im} z = 0$. 5

Im *z*

z

|*z* − *i*|

i

i|

+

$|z$

Re z

$-i$

Bild 3.39

Wegen $\Phi(\infty) = 1$ erhalten wir daraus:

$|\Phi(z)| < 1 \Longleftrightarrow \operatorname{Im} z > 0$, $|\Phi(z)| = 1 \Longleftrightarrow z \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

Dabei haben wir benützt, daß Φ eine Bijektion ist. Auch die Einschränkungen von Φ auf E resp. S 1 sind bijektiv, und es folgt der erste Teil der Behauptung.

5 Zum Beweis berechne man $|z + i|\ 2 - |z - i|\ 2$!

a

b

2. Für eine Matrix $A =$

bezeichne A

die *transponierte Matrix*

c

d

a

c

A

$=$

. Man rechnet leicht nach, daß

b

d

1

0

-1

$0 -1$

$C-1$

C

$= i$

0 − 1

1

0

a b

Ist also $A =$

$\in GL(2, \mathbb{C})$ mit $\det A = 1$ so gilt

c d

1

0

1

0

CAC^{-1}

(CAC^{-1})

=

0 − 1

0 − 1

$\Longleftrightarrow$

1

0

− 1

1

0

$C\,A\,C-1$

C

A

C

$=$

$0\ -1$

$0\ -1$

$\Longleftrightarrow$

1

0

-1

1

0

-1

$C-1$

C

A

$=A-1\ C-1$

C

$0\ -1$

$0 - 1$

$\Longleftrightarrow$

$0 - 1$

$0 - 1$

A

$= A - 1$

1

0

1

0

$\Longleftrightarrow$

$0 - 1$

$a\ c$

$d - b$

$0 - 1$

$=$

1

0

$b\ d$

$-c\ a$

1

0

$\Longleftrightarrow$

$-b - d$

$b - d$

$=$

a

c

a

c

$\Longleftrightarrow A \in SL(2, \mathrm{R})$

Da die Abbildung $A \to CAC^{-1}$ eine Bijektion von $GL(2, \mathrm{C})$ auf sich ist und die Determinante erhält, folgt *2* aus der obigen Berechnung. In einer Übung am Ende dieses Abschnitts ist ein geometrischer Beweis angedeutet.

3. Sei zunächst $g \in G2$. Das heißt, g ist der Durchschnitt von H mit einem Kreis k, der die reelle Achse senkrecht schneidet. Da Φ winkeltreu ist, schneiden sich $\Phi(k)$ und $\Phi(\mathrm{R} \cup \{\infty\}) = S1$ wieder senkrecht. Folglich ist

$\Phi(g) = \Phi(k) \cap \Phi(H) = \Phi(k) \cap E \in G$

Offenbar trifft $\Phi(k)$ den Punkt $1 = \Phi(\infty)$ nicht.

Ist umgekehrt $g \in k \cap E$ ein Element von G, wobei $k \in K$ senkrecht zu $S1$ liegt und den Punkt 1 nicht enthält, so sieht man wie oben, daß $\Phi^{-1}(g) \in G2$.

Sei nun $g \in G1$. Wähle $A \in SL(2, \mathrm{R})$ so, daß $\phi A(g) \in G2$. Dann ist nach dem

eben Bewiesenen $\Phi(\phi A(g)) \in G$. Nach *2* ist $CA-1\ C-1 \in SU(1,1)$, also ist $\phi CA-1\ C-1[\Phi(\phi A(g))] \in G$. Aber

.

3.4 Die Winkelmessung in der hyperbolischen Ebene

145

$\phi CA-1\ C-1 \circ \Phi \circ \phi A = \phi CA-1\ C-1 \circ \phi C \circ \phi A = \phi C = \Phi$

Damit ist auch in diesem Fall gezeigt, daß $\Phi(g) \in G$.

Ist schließlich $g \in G$ von der Form $k \cap E$, wobei $k \in K$ den Punkt 1 enthält,

so zeigt man wie oben, daß $\Phi - 1(g) \in G$ 1. Damit ist Satz 3.6 bewiesen.

✷

Um nun den Satz über die Winkelsumme des hyperbolischen Dreiecks zu formulieren,

sei noch folgende abkürzende Schreibweise eingeführt: Sind $z_1, z_2, z_3 \in H$ drei Punkte,

die nicht auf einer hyperbolischen Geraden liegen, so nennen wir

$W(z_1, z_2, z_3) := W(S(z_2, z_1), S(z_2, z_3))$ die Größe des Winkels

$z_1 z_2 z_3$.

Satz 3.7 *F¨*

ur drei Punkte z_1, z_2, z_3 *von H, die nicht auf einer gemeinsamen hyper-*

bolischen Geraden liegen, gilt stets (siehe Bild 3.40)

$W(z_1, z_2, z_3) + W(z_2, z_3, z_1) + W(z_3, z_1, z_2) < 180\circ$

Im z

z

z

1

3

z 2

Re z

Bild 3.40

Beweis (Skizze) Nach Teil *3* von Proposition 28 können wir ohne Beschränkung

der Allgemeinheit annehmen, daß $z\,3 = i$. Da die Cayley-Transformation Φ als ge-

brochen lineare Transformation winkeltreu ist, genügt es zu zeigen, daß die Winkel-

summe des Dreiecks $\Phi(z\,1)\Phi(z\,2)\Phi(z\,3)$ im Poincaré-Scheibenmodell strikt kleiner als

$180\circ$ ist. Nun ist aber $\Phi(z\,3) = \Phi(i) = 0$, also hat das betreffende Dreieck die Ge-

stalt gemäß Bild 3.41. Vergleicht man dieses Dreieck mit dem euklidischen Dreieck

durch die selben Ecken, so ist offensichtlich die Winkelsumme strikt kleiner als im

euklidischen Fall, wo sie bekanntlich $180\circ$ beträgt.

✷

Zum Abschluß formulieren wir noch den Satz, daß ein Dreieck in der hyperboli-

schen Ebene durch seine Winkel bis auf Kongruenz bestimmmt ist.

Φ(*z* 2)

Φ(*z* 3)

Φ(*z* 1)

0

Bild 3.41

Satz 3.8 *Seien z* 1 *,z* 2 *,z* 3 *und z ,z ,z Punkte in H so, daß weder alle drei Punkte*

1

2

3

z 1 *,z* 2 *,z* 3 *noch alle drei Punkte z ,z ,z auf einer hyperbolischen Geraden liegen. Es*

1

2

3

gelte

z

∼

1 *z* 2 *z* 3

z z z ,

z

z z ,

z

z z

1 2 3

2 z 3 z 1

z 2 3 1

3 z 1 z 2 =

z 3 1 2

Dann ist

z

∼

∼

∼

1 z 2 = z z ,

z

z ,

z

z

1 2

2 z 3 = z 2 3

3 z 1 = z 3 1

Diesen Satz wollen wir nicht beweisen, einen Beweis findet man in den zitierten

Büchern über nichteuklidische Geometrie oder in den Übungen am Ende dieses Ab-

schnitts.

Sind p,q,r ganze Zahlen mit $1/p + 1/q + 1/r < 1$, so läßt sich die hyperbolische

Ebene H lückenlos überdecken mit lauter kongruenten Dreiecken mit den Winkeln

$1/p \cdot 180^\circ$, $1/q \cdot 180^\circ$, $1/r \cdot 180^\circ$. Bild 3.42 aus [Fricke–Klein] zeigt eine Überdeckung von E mit Dreiecken vom Typ $(p,q,r) = (2, 3, 7)$. Die Symmetriegruppen solcher und

ähnlicher Konfigurationen sind sozusagen die hyperbolischen kristallographischen

”

Gruppen“. Sie spielen eine wichtige Rolle in vielen Gebieten der Mathematik (siehe

z.B. [Lehner]). Auch in Figuren von M. C. Escher wird mit dieser Art von Symmetrie

operiert ([Coxeter et al.]).

¨

Ubung: Die Gruppe $SL(2, \mathbb{C}) = A \in GL(2, \mathbb{C})$ $\det A = 1$

operiert auf der Menge

K aller Geraden und Kreise auf der Riemannschen Zahlenkugel durch

$SL(2, \mathbb{C}) \times K \longrightarrow K$, $(A,k) \longrightarrow \phi A(k)$

Zeigen Sie, daß $SL(2, \mathbb{R})$ die Stabilisatoruntergruppe der komplettierten reellen Ach-

se $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ist, während die Stabilisatoruntergruppe von S^1 gleich $SU(1, 1)$ ist!

Verwenden Sie dies und Bemerkung 13 aus Abschnitt 1.2, um Teil *1* von Satz 3.5 zu

beweisen!

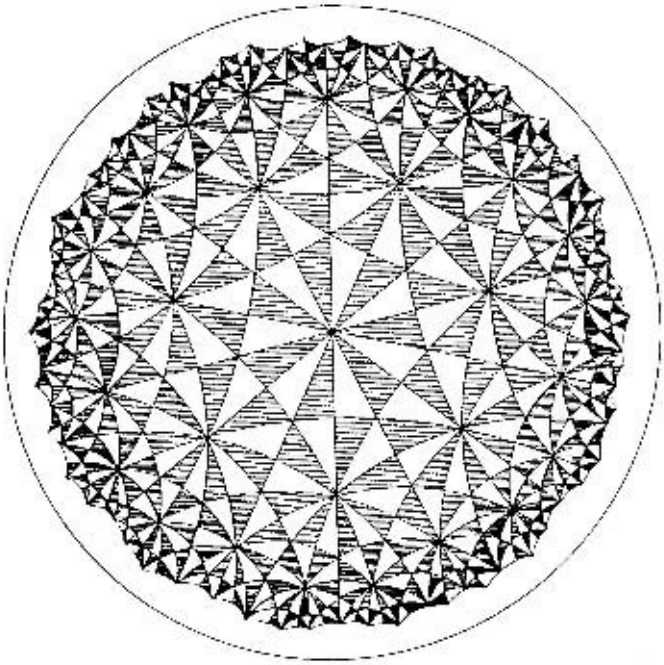


Bild 3.42

Ubung: Zeigen Sie, daß es für jedes $\varepsilon > 0$ ein hyperbolisches Dreieck gibt, dessen

Winkelsumme kleiner als ε ist! (Hinweis: Modifizieren Sie die Figur in Bild 3.43

etwas!)

Bild 3.43

..

Ubung: (i) Zeigen Sie ohne Verwendung von Satz 3.7, daß die Winkelsumme in dem

hyperbolischen Viereck mit den Ecken $-1 + i$, $1 + i$, $-1 + 2i$, $1 + 2i$ kleiner als 360°

ist!

(ii) Zeigen Sie mit Hilfe von Satz 3.7, daß die Winkelsumme in jedem hyperbolischen

Viereck kleiner als 360° ist!

.

.

..

Ubung: (i) Beweisen Sie Satz 3.8 unter der zusätzlichen Annahme, daß

$z_2 z_3 z_1 = z_3 z_2 z_1$

(Hinweis: Zeigen Sie zunächst, daß z

$\sim$

$\sim$

$1 z_2 = z_1 z_3$ und $z z$

z , das heißt, daß

1 2 = z 1 3

die Dreiecke gleichschenklig sind! Zeigen Sie, daß man o.B.d.A. annehmen kann,

daß z 1 = z = i, z ∈ S(z

∈ S(z

1

2

1 ,z 2), z 3

1 ,z 3)! Betrachten Sie nun die Dreiecke

Φ(z 1)Φ(z 2)Φ(z 3) und Φ(z)Φ(z)Φ(z) (siehe Bild 3.44)!)

1

2

3

Φ(z)

3

Φ(z 3)

Φ(z)

2

Φ(z

0

2)

Bild 3.44

(ii) Folgern Sie den allgemeinen Fall von Satz 3.8 aus (i), indem Sie ein gegebenes

Dreieck in gleichschenklige Dreiecke zerlegen! ¨

Ubung: Zeigen Sie: Ist $z\,0 \in H$, $r > 0$,

so gibt es $w(z\,0, r) \in H$ und $R(z\,0, r) > 0$, so daß

$\{z \in H \mid d(z\,0, z) = r\} = z \in \mathrm{C}\ |z - w(z\,0, r)| = R(z\,0, r)$!6

Im Allgemeinen ist $w(z\,0, r) = z\,0$.

(Hinweis: Gehen Sie zunächst zum Poincaré'schen Scheibenmodell über und betrach-

ten Sie den Fall $z\,0 = 0$! Verwenden Sie dann Proposition 42!)

3.5

Erg¨

anzungen zu Kapitel 3

3.5.1

Das Beltrami–Klein–Modell

Ein anderes Modell eines Systems ($E, G, Z, \sim$

$=$,

), das alle Axiome einer *euklidi-*

schen Ebene bis auf das Parallelenaxiom erfüllt, ist das sogenannte Beltrami–Klein–

Modell. Die zugrundeliegende Punktmenge ist wieder das Innere eines Kreises

6 Mit anderen Worten: Im Poincaré-Modell der hyperbolischen Geometrie sind hyperbolische Krei-

se auch euklidische Kreise“.

”

.

$E :=$

$z \in \mathbb{C}\ |z| < c$

,

c

wobei c eine positive reelle Zahl ist. (Sobald das Modell beschrieben ist, kann man

nachprüfen, daß zwei Modelle, die zu verschiedenen Werten von c gehören, isomorph

sind.) Das System G ist im Beltrami–Klein–Modell einfach zu beschreiben: Es ist

die Menge aller Geradenstücke innerhalb des Kreises E .

c

Die Relation zwischen“ wird wieder auf die naheliegende Weise definiert. Um Kon-

”

gruenz von Strecken zu definieren, führt man einen Abstand ein, der genauso kon-

struiert wird wie im Poincaré-Modell. Sind $z_1, z_2 \in E$ zwei verschiedene Punkte, so

c

seien w_1 und w_2 die Schnittpunkte der euklidischen Geraden durch z_1 und z_2 mit

dem Rand von E . Man setzt (siehe Bild 3.45)

c

$d(z_1, z_2) := |\log DV(z_1, z_2, w_1, w_2)|$

w_2

z_2

z_1

w_1

Bild 3.45

und sagt, zwei Strecken $z_1 z_2$ und $z z$ seien kongruent, wenn $d(z$

$, z)$.

$1\ 2$

$1, z_2) = d(z_1\ 2$

Kongruenz von Winkeln ist schwieriger zu definieren (siehe [Greenberg], Kap. 7);

insbesondere kann man in diesem Modell nicht die euklidische Winkelmessung über-

nehmen. Andererseits sind in diesem Modell *hyperbolische Geraden* wenigstens ge-

”

rade“.

Man kann sich durch eine geometrische Konstruktion davon überzeugen, daß das

Beltrami–Klein–Modell zum Poincaré’schen Scheibenmodell isomorph ist (siehe Bild

3.46). Dazu lege man eine Sphäre vom Radius 1 / 2 auf die komplexe Ebene, so daß

der Südpol“ gerade auf den Nullpunkt zu liegen kommt. Projektion vom Nordpol

”

aus induziert dann eine Bijektion zwischen der Einheitskreisscheibe E in der kom-

plexen Ebene und der unteren Hemisphäre. Parallelprojektion senkrecht zur kom-

plexen Ebene bildet die untere Hemisphäre bijektiv auf E

ab. Setzt man diese

1 / 2

beiden Abbildungen zusammen, so erhält man eine Bijektion $\Psi : E \longrightarrow E$

. Man

1 / 2

.

kann zeigen, daß Ψ hyperbolische Geraden aus dem Poincaré’schen

Scheibenmodell

auf hyperbolische Geraden im Beltrami–Klein–Modell abbildet und überhaupt einen

Isomorphismus zwischen den beiden Modellen definiert (vgl. [Greenberg], Kap.7,

[Hilbert–Cohn Vossen], Abschnitt 36).

Bild 3.46

3.5.2

Bemerkungen zur Geschichte

Historische Betrachtungen, die von Mathematikern angestellt werden, hinterlassen

zuweilen einen etwas schalen Nachgeschmack. Abgesehen davon, daß sie manchmal

schlecht recherchiert sind, ist die Betrachtungsweise nicht selten einseitig: Entwick-

lungen in der Mathematik und Werke einzelner Mathematiker werden nur danach

beurteilt, ob sie einen Beitrag zur Theorie, wie wir sie heute sehen, geliefert ha-

ben. Besonders schlimm ist ein derartiges Vorgehen bei dem Thema dieses Kapi-

tels: euklidische und nicht-euklidische Geometrie. Der moderne“ Standpunkt ist ja,

”

dies alles als Spiel mit Axiomensytemen aufzufassen, die von 5-Tupeln von Men-

gen mit irgendwelchen Eigenschaften handeln. Nimmt man das als Maßstab für

historische Betrachtungen, fallen alle philosophischen, naturphilosophischen und er-

kenntnistheoretischen Probleme, die mit Diskussion und Kritik des Begriffs Raum“

”

zusammenhängen, unter den Tisch oder werden lächerlich gemacht.

Nachdem wir nun auf einige Fehler, die man machen kann, hingewiesen haben,

werden wir sie leider auch fast alle machen. Von dem Standpunkt aus gesehen, den

wir in diesem Kapitel eingenommen haben, läßt sich die historische Entwicklung

grob in fünf Phasen einteilen (für ausführlichere Darstellungen siehe z.B. [Stillwell],

[Kline], [Pont], [Reichardt], [Rosenfeld]).

Axiomatisierung der Geometrie

Mathematik als eine eigenständige, organische Disziplin der Wissenschaft wurde

nach allgemeiner Überzeugung in Griechenland in der Zeit zwischen 600 und 300

vor Christus entwickelt. Selbstverständlich waren Tatsachen, die wir heute mathe-

matische Sätze nennen würden,schon früher und auch in anderen Kulturen bekannt

(siehe z.B. [Neugebauer], [van der Waerden 1956]). Die Vorstellung, daß solche

Tat-

sachen eines Beweises bedürfen, fehlte jedoch nahezu völlig.

In der griechischen Philosophie diente die Mathematik als Beispiel dafür, daß es

möglich ist, durch Deduktion zu allgemein gültigen Wahrheiten zu gelangen. Sie war

Teil eines größeren Systems von Erkenntnissen, das die Philosophen durch Philoso-

phieren und nicht durch Experimentieren zu erreichen suchten. Ein Zitat aus Plato's

Politeia“ (Buch VI, Rec. 510) beschreibt ein wenig die Sichtweise auf die Mathe-

”

matik, die in der Blütezeit der griechischen Philosophie vorherrschte:

Dieses, sagte er, was du da erklärst, habe ich nicht gehörig verstanden. – Hernach

”

aber, sprach ich; denn wenn folgendes noch vorangeschickt ist, wirst du es leichter

verstehen. Denn ich denke, du weißt, daß die, welche sich mit der Meßkunst und den

Rechnungen und dergleichen abgeben, das Gerade und Ungerade und die Gestalten

und die drei Arten der Winkel und was dem sonst verwandt ist in jeder Verfahrens-

art voraussetzend, nachdem sie dies als wissend zugrunde gelegt, keine Rechenschaft

weiter darüber weder sich noch andern geben zu müssen glauben, als sei dies schon

allen deutlich, sondern hiervon beginnend gleich das Weitere ausführen und dann

folgerechterweise bei dem anlangen, auf dessen Untersuchung sie ausgegangen waren.

– Allerdings, sagte er, dies ja weiß ich. – Auch daß sie sich der sichtbaren Gestalten

bedienen und immer auf diese ihre Reden beziehen, unerachtet sie nicht von diesen

handeln, sondern von jenem, dem diese gleichen, und um des Vierecks selbst willen

und seiner Diagonale ihre Beweise führen, nicht um dessen willen, welches sie zeich-

nen, und so auch sonst überall: dasjenige selbst, was sie nachbilden und abzeichnen,

wovon es auch Schatten und Bilder im Wasser gibt, dessen bedienen sie sich zwar als

Bilder, sie suchen aber immer jenes selbst zu erkennen, was man nicht anders sehen

kann als mit Verständnis. – Du hast recht, sagte er. –“

In diesem Umfeld gab es vermutlich viele Ansätze, die Geometrie zu axiomatisieren.

Euklid’s Elemente, die um ca. 300 v. Chr. entstanden, sind das Ergebnis einer langen

Entwicklung und fassen so eine Jahrhunderte währende Diskussion zusammen. Es

ist bekannt, daß bereits in Plato’s Akademie die möglichen Grenzen der Erkennt-

nis diskutiert wurden. Genauer: Es stellte sich die Frage, ob es im Prinzip möglich

sei, jede vorgelegte Frage auf der Basis der bekannten Wahrheiten und Hypothesen

zu entscheiden. Insofern ist es nicht erstaunlich, daß die Diskussion um das Paral-

lelenaxiom nahezu gleichzeitig mit der Entwicklung eines deduktiven Aufbaus der

Geometrie begann (siehe [Tóth, I.]).

Versuche, das Parallelenaxiom aus den anderen euklidischen Axiomen

herzuleiten

Die ersten dokumentierten Versuche findet man in dem etwa 450 n. Chr. entstan-

denen Kommentar zu Euklid’s Elementen von Proklos Diodachos, der einen seiner

beiden Beweise Ptolomäus zuschreibt. Für eine kritische Diskussion eines der beiden

Beweise siehe [Greenberg], Kap.5. Bekanntlich wurde die Überlieferung der griechi-

schen Mathematik im Mittelalter hauptsächlich im arabischen Sprachraum gepflegt.

Entsprechend fand auch eine intensive Auseinandersetzung mit dem Parallelenaxiom

statt, siehe z.B. [Rosenfeld] ch. 2. In Europa gab es im Mittelalter relativ wenige ori-

ginelle Arbeiten zur Mathematik überhaupt und entsprechend nahezu keine Beiträge

zum Parallelenaxiom. In der Renaissance erwachte auch in Europa das Interesse an

griechischer Mathematik.

Wir wollen nicht alle Arbeiten erwähnen, sondern nur kurz auf die Untersuchun-

gen von G. Saccheri (1667-1733) und J. Lambert (1728-1777) eingehen. Beide ver-

suchten, das Parallelenaxiom durch Widerspruch zu beweisen. Sie nahmen also das

Gegenteil des Parallelenaxioms an und zogen Folgerungen, die wir heute als Sätze

der nicht-euklidischen Geometrie bezeichnen würden. Beispielsweise bewies Lambert,

daß die Fläche eines hyperbolischen Dreiecks mit den Winkeln α,β,γ proportional

zu $180^\circ - \alpha - \beta - \gamma$ ist. Sowohl Saccheri als auch Lambert war klar, daß sie mit ihren

Untersuchungen nicht wirklich zu einem Widerspruch gekommen waren.

Erkenntnis, daß eine nicht-euklidische Geometrie denkbar ist

Ziel aller bisher beschriebenen Arbeiten war es, in irgendeiner Weise das Paralle-

lenaxiom aus den anderen Axiomen herzuleiten. Saccheri und Lambert sahen die

seltsamen Tatsachen und Formeln, die sie aus der Annahme der Negation des

Par-

allelenaxioms herleiten konnten, als Indiz dafür, daß sie nahe an einem Widerspruch

waren. Eine nicht-euklidische Geometrie war für sie eine Absurdität, die es einfach

nicht geben konnte. Der erste Mathematiker, der diese Überlegung nicht teilte, war

C.F. Gauß (1777-1855). Auch er untersuchte Konsequenzen der Negation des Par-

allelenaxioms; die Konsistenz der entstehenden Theorie ließ ihn aber die Position

einnehmen, daß eine nicht-euklidische Geometrie durchaus existieren könne (siehe

z.B. [Bühler], Kap.9). Er ist mit dieser Position aber nie an eine breite Öffentlichkeit

getreten, vermutlich, weil er die entstehenden philosophischen Auseinandersetzun-

gen scheute. In Briefen, insbesondere an Schumacher und Gerling, vertrat er seine

Position aber deutlich.

Unabhängig von Gauß kamen zwei andere Mathematiker zu ähnlichen Schlüssen,

nämlich J. Bolyai und N. Lobachevski, die beide ihre Einsichten und Überzeugungen

veröffentlichten. Die Geschichte dieser Veröffentlichungen ist nahezu tragisch. Janos

Bolyai schrieb einen Anhang zu einem Mathematiklehrbuch seines Vaters Wolfgang,

in dem er seine Erkenntnisse darstellte. Gauß erhielt dieses 1831 erschienene Buch

und schrieb über den Anhang an Wolfgang Bolyai:

...Es ist kein Glück, alt zu werden. Mein Vater war schon 1808 gestorben. So viel

”

in Kürze über meine häuslichen Verhältnisse. Jetzt einiges über die Arbeit Deines

.

Sohnes. – Wenn ich damit anfange, *daß ich solche nicht loben darf*, so wirst Du wohl

einen Augenblick stutzen, aber ich kann nicht anders; sie loben hieße, mich selbst zu

loben, denn der ganze Inhalt der Schrift, der Weg, den Dein Sohn eingeschlagen hat,

und die Resultate, zu denen er geführt ist, kommen fast durchgehends mit meinen

eigenen, zum Teile schon seit 30-35 Jahren angestellten Meditationen überein. In der

Tat bin ich dadurch auf das Äußerste überrascht. – Mein Vorsatz war, von meiner

eigenen Arbeit, von der übrigens bis jetzt wenig zu Papier gebracht war, bei meinen

Lebzeiten gar nichts bekannt werden zu lassen. Die meisten Menschen haben gar

nicht den rechten Sinn für das, worauf es dabei ankommt, und ich habe nur weni-

ge Menschen gefunden, die das, was ich ihnen mitteilte, mit besonderem Interesse

aufnahmen. Um das zu können, muß man erst recht lebendig gefühlt haben, was

eigentlich fehlt, und darüber sind die meisten Menschen ganz unklar. Dagegen war

meine Absicht, mit der Zeit alles zu Papier zu bringen, daß es wenigstens mit mir

dereinst nicht unterginge. – Sehr bin ich also überrascht, daß diese Bemühung mir

nun erspart werden kann, und höchst erfreulich ist es mir, daß gerade der Sohn mei-

nes alten Freundes es ist, der mir auf eine so merkwürdige Art zuvorgekommen ist....“

Janos Bolyai, der vermutete, daß Gauß seine Ideen gestohlen hätte, war tief enttäuscht

über diese Antwort; verbittert zog er sich von der Mathematik zurück.

Die erste Arbeit, die nicht-euklidische Geometrie postuliert, wurde im Jahre 1829

von N. Lobachevski veröffentlicht. Unglücklicherweise verwendete Lobachevski die

Argumente der nicht-euklidischen Geometrie auch dazu, einige Integrale zu berech-

nen, und bei einem machte er einen Fehler. Das falsche Ergebnis wurde von einigen

seiner Zeitgenossen bemerkt, die daraufhin die ganze Theorie als unseriös abtaten

([Rosenfeld], pp. 208-210). Gauß erhielt erst 1841 Kenntnis von Lobachevski's Ar-

beiten. Er lobte sie zwar im Freundes- und Bekanntenkreis sehr, unternahm aber

nichts, sie einer großen Öffentlichkeit vorzustellen.

Offenbar ist es auch heute noch schwierig, emotionsfrei die Bedeutung der Ar-

beiten von Gauß, Bolyai und Lobachevski zu würdigen und die Prioritätsfragen zu

diskutieren; vergleichen Sie etwa die Einschätzungen von Lobachevski's Arbeiten in

[Rosenfeld] und in [Kline].

Modelle f¨

ur die nicht-euklidische Geometrie

Das Interesse einer größeren mathematischen Öffentlichkeit an der nicht-euklidischen

Geometrie stieg nach Gauß' Tod 1855, als aus seinem Nachlass deutlich wurde, daß er

sich mit solchen Fragen intensiv auseinandergesetzt hatte. In dieser Zeit wurden auch

die Arbeiten von Bolyai und Lobachevski aus der Versenkung geholt und studiert.

Zum ersten wirklichen Modell der hyperbolischen Ebene wurde E. Beltrami durch

Untersuchungen der Differentialgeometrie von Flächen konstanter negativer Krüm-

mung geführt. Ein Papiermodell von Beltrami’s Beispiel einer nichteuklidischen Ebe-

ne ist übrigens erhalten ([Capelo–Ferrari]). Das Modell von Beltrami wurde von

Felix Klein ([Klein 1871]) weiter ausgearbeitet und vereinfacht zu dem in Abschnitt

3.5.1 oben beschriebenen Modell. Klein hat übrigens auch die systematische Verwen-

dung des Gruppenbegriffs in der Geometrie (und anderen Gebieten der Mathematik)

propagiert, ein Standpunkt, den wir hier (wie fast alle Mathematiker heutzutage)

eingenommen haben.

Die obere Halbebene und die Operation von $SL(2\ ,\ \mathrm{R})$ auf der oberen Halbebene

war in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts den Mathematikern wohlvertraut.

Erst H. Poincaré bemerkte in seinen Untersuchungen über Fuchs’sche Gruppen (d.h.

Gruppen wie die am Ende von Abschnitt 3.4 erwähnten) um 1882, daß damit ein

Modell der hyperbolischen Ebene konstruiert werden kann ([Poincaré], ch.III, [Gray],

appendix 4).

Die

formale Periode“

”

In den Jahren seit 1870 entstand, insbesondere durch die Arbeiten von G. Cantor,

die Mengenlehre, wie wir sie heute kennen. Es traten bald auch die ersten Antinomi-

en auf. Diese Probleme in den Grundlagen der Mathematik führten dazu, daß man

sich intensiv mit der Axiomatisierung der Mengenlehre und anderer Gebiete der Ma-

thematik zu beschäftigen begann. Sozusagen als Modellproblem hierfür betrachtete

D. Hilbert die Geometrie. In seiner Vorlesung 1899 und dem daraus entstandenen

Buch ([Hilbert]) entwickelte er den formalen Standpunkt, den wir hier auch einge-

nommen haben. Zumindest formal macht er auch keinen Unterschied zwischen dem

Parallelenaxiom und all den andern Axiomen. So diskutiert er in Kapitel II des

Buches die Frage der Unabhängigkeit der Kongruenz- und Stetigkeitsaxiome. Übri-

gens hat die damals begonnene Diskussion der Axiomatik der Mengenlehre später

zu einem weiteren spektakulären Unabhängigkeitsbeweis geführt. Die sogenannte

Kontinuumshypothese besagt, jede unendliche und nicht abzählbare Menge habe

mindestens die Mächtigkeit der Menge der reellen Zahlen. Im Jahre 1963 gelang es

P. Cohen zu zeigen, daß die Kontinuumshypothese von den anderen üblichen Axio-

men der Mengenlehre in derselben Weise unabhängig ist wie das Parallelenaxiom

von den anderen Axiomen der euklidischen Geometrie.

3.5.3

Reduktion bin¨

arer quadratischer Formen und ebene Gitter

Eine *bin¨*

are quadratische Form (oder quadratische Form in zwei Veränderlichen) ist

eine Abbildung

q : R2 − → R

der Form

$q(x 1 ,x 2) = \alpha x 2 + 2 \beta x$

1

$1 x 2 + \gamma x 2$

2

mit $\alpha,\beta,\gamma \in$ R. Ist eine binäre quadratische Form q vorgegeben, so stellt sich das

Problem, die Menge q(Z2) ihrer Werte auf den ganzen Zahlen zu bestimmen. Ist

etwa $\alpha = 5$, $\beta = 12$, $\gamma = 29$, so ist dies die Frage, für welche w die Gleichung

$5 x 2 + 24 x$

$= w$

1

1 x 2 + 29 x 2

2

.

3.5 Ergänzungen zu Kapitel 3

155

eine ganzzahlige Lösung (x 1 ,x 2) hat. Wir wollen diese Frage hier nicht beantworten

(für die obige quadratische Form siehe z.B. [Hardy–Wright]), sondern nur diskutie-

ren, weshalb die Untersuchung binärer quadratischer Formen auf natürliche Weise

zur Betrachtung der oberen Halbebene H und der Operation von SL(2 , R) auf H

durch gebrochen lineare Transformationen führt. Die Menge der Werte, die eine

binäre quadratische Form auf den ganzen Zahlen annimmt, ändert sich natürlich

nicht, wenn man in R2 eine Koordinatentransformation durchführt, die ganzzahli-

ge Koeffizienten hat, und für die die inverse Koordinatentransformation ebenfalls

ganzzahlige Koeffizienten hat. Wir setzen

a

b

a

b

$SL(2, \mathbb{Z}) :=$

$a,b,c,d \in \mathbb{Z}$, det

$= 1$

c

d

c

d

Übung: (i) Zeigen Sie, daß $SL(2, \mathbb{Z})$ eine Untergruppe von $SL(2, \mathbb{R})$ ist!

(ii) Ist $A \in SL(2, \mathbb{R})$ eine Matrix mit ganzzahligen Einträgen und positiver De-

terminante, so hat A^{-1} genau dann auch nur ganzzahlige Einträge, wenn

$A \in SL(2, \mathbb{Z})$!

Die Matrizen aus $SL(2, \mathbb{Z})$ beschreiben also gerade die Koordinatenwechsel mit obi-

gen Eigenschaften, die eine positive Determinante haben. Da der Koordinatenwech-

sel, der durch Vertauschen der beiden Koordinaten x_1 und x_2 entsteht, durch die

0

1

Matrix

, deren Determinante -1 ist, beschrieben wird, genügt es, Koordi-

1

0

natenwechsel mit positiver Determinante zu betrachten.

Definition 48 *Wir nennen zwei bin¨*

are quadratische Formen q,q ¨

aquivalent, wenn

es $A \in SL(2, \mathbb{Z})$ *und* $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda = 0$ *gibt, so daß*

q

$= \lambda \cdot (q \circ A^{-1})$

Dabei bezeichnet $q \circ A^{-1}$ die Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \to q(A^{-1}\mathbf{x})$. In der obigen Definition hätten wir genauso gut einfach $q \circ A$ statt $q \circ A^{-1}$ schreiben können. Daß

wir $q \circ A^{-1}$ gewählt haben, liegt daran, daß $(A,q) \to q \circ A^{-1}$ eine Gruppenoperation

von $SL(2, \mathbb{Z})$ auf der Menge der quadratischen Formen definiert, $(A,q) \to q \circ A$ aber

nicht.

Beispiel Es sei

$q(x_1, x_2) = 5x_2 + 24x$

1

$1x_2 + 29x_2$

2

und

1

2

$A =$

2

5

Dann ist

5

− 2

$A - 1 =$

− 2

1

.

.

.

156

3 Das Parallelenaxiom

und $q \circ A - 1$ ist die Abbildung

$(x_1, x_2) \longmapsto 5 \cdot (5x_1 - 2x_2)^2 + 24 \cdot (5x_1 - 2x_2)(-2x_1 + x_2) + 29 \cdot (-2x_1 + x_2)^2 = x_2 + x_2$

1

2

Sind zwei binäre quadratische Formen äquivalent, und kennt man die Menge der

Werte, die die eine Form auf Z2 annimmt, so kennt man auch die Werte, die die

andere Form auf Z2 annimmt. Diese beiden Mengen gehen ja durch Multiplikation

mit dem Skalar λ auseinander hervor. Deswegen möchten wir Normalformen“ für

”

binäre quadratische Formen konstruieren, das heißt, eine Klasse besonders einfach

aussehender quadratischer Formen angeben, so daß jede binäre quadratische Form

zu einer (und möglichst nur einer) Form aus dieser Klasse äquivalent ist. Mit diesem

Problem wollen wir uns jetzt beschäftigen.

Zunächst bemerken wir, daß sich eine binäre quadratische Form

$q(x 1 ,x 2) = \alpha x 2 + 2 \beta x$

1

$1 x 2 + \gamma x 2$

2

auch in der Gestalt

2

$q(x 1 ,x 2) = x 2 \cdot \alpha x 1$

$+ 2 \beta x 1 + \gamma$

(3.23)

2

$x 2$

$x 2$

schreiben läßt. Deshalb ist es naheliegend, den Ausdruck

$D(q) := \alpha\gamma - \beta 2$

die *Diskriminante* von q zu nennen (vgl. auch Kapitel 4.1).

Übung: Zeigen Sie: Sind q und q binäre quadratische Formen und ist $q = \lambda \cdot q \circ A - 1$

mit $A \in SL(2, \mathrm{Z})$, so ist $D(q) = \lambda 2 D(q)$!

Die Vorzeichen der Diskriminanten zweier äquivalenter quadratischer Formen sind

also gleich. Der Fall nichtpositiver Diskriminante ist einfach zu behandeln.

Lemma 49 *Sei*

$q(x 1, x 2) = \alpha x 2 + 2 \beta x$

1

$1 x 2 + \gamma x 2$

2

eine bin¨

are quadratische Form, die nicht identisch Null ist.

i) Ist $D(q) < 0$ *, so gibt es* $\mu 1, \mu 2 \in \mathrm{R}$ *so daß*

$q(x 1, x 2) = \alpha(x 1 - \mu 1 x 2)(x 1 - \mu 2 x 2)$

ii) Ist $D(q) = 0$ *, so gibt es* $\mu \in \mathrm{R}$ *so daß*

$q(x 1, x 2) = \alpha(x 1 - \mu x 2)2$

.

.

.

.

.
.
.
.
.

3.5 Ergänzungen zu Kapitel 3

157

Beweis Im Fall (i) hat die Gleichung

$\alpha y 2 + 2 \beta y + \gamma = 0$

zwei verschiedene Lösungen $\mu 1 ,\mu 2$. Dann ist

$\alpha y 2 + 2 \beta y + \gamma = \alpha(y - \mu 1)(y - \mu 2)$

und die Behauptung folgt sofort aus (3.23). Der Fall (ii) ist analog.

✷

..

a

b

Ubung: i) Ist $q(x 1 ,x 2) = \alpha(x 1 - \mu 1 x 2)(x 1 - \mu 2 x 2)$ und $A =$

$\in SL(2 , Z)$, so

c

d

ist $q \circ A - 1$ die Form $(x 1 ,x 2) \rightarrow (c\mu 1 + d)(c\mu 2 + d)$

$x 1 - a\mu 1 + b x$

x

$c\mu_1 + d_2$

$x_1 - a\mu_2 + b$

$c\mu_2 + d_2$

!

ii) Sind $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{Q}$, so ist die Form $(x_1 - \mu_1 x_2)(x_1 - \mu_2 x_2)$ äquivalent zu einer Form der Gestalt $x_1(x_1 - \varepsilon x_2)$ mit $\varepsilon \in \mathbb{Q}$!

Lemma 49 zeigt, daß für eine binäre quadratische Form q gilt

$D(q) < 0$

$\Longleftrightarrow$ Es gibt $(x_1, x_2), (x, x) \in \mathbb{R}^2$ so daß $q(x$

$, x) < 0$

1

2

$_1, x_2) > 0$ und $q(x_1$

2

In diesem Fall nennt man q *indefinit*. Ebenso ist

$D(q) > 0$

$\Longleftrightarrow$

$q(x_1, x_2) = 0$ für alle $(x_1, x_2) = (0, 0)$

In diesem Fall nennt man q *definit*. Wir konzentrieren uns hier auf definite Formen;

für weitergehende Informationen über indefinite Formen siehe z.B. [Scharlau–Opolka]

Kap. 4. Eine erster Schritt bei der Suche nach einer Normalform ist

Lemma 50 *Jede bin¨*

are quadratische Form mit positiver Diskriminante ist ¨

aquiva-

lent zu einer Form der Gestalt

$q\tau (x 1 ,x 2) = x 2 + 2 \tau$

$+ \tau 2) x 2 = |x$

1

$1 x 1 x 2 + (\tau 2$

1

2

2

$1 + x 2 \tau | 2$

mit $\tau = \tau 1 + i\tau 2 \in H$.

Beweis Sei $q(x 1 ,x 2) = \alpha x 2 + 2 \beta x$

. Ist $D(q) = \alpha\gamma - \beta 2 > 0$, so ist $\alpha = 0$

1

$1 x 2 + \gamma x 2$

2

2

und $\gamma - \beta$

> 0 . Wir setzen

α

α

2

τ 1 := β ,

τ

$- \beta$

α

2 :=

γ

α

α

Dann ist

$q = \alpha \cdot q\tau$

✷

Es stellt sich nun die Frage, wann zwei Formen $q\tau$,$q\tau$ äquivalent sind. Die Antwort

ist

.

.

.

.

.

.

.

Lemma 51 *Seien* $\tau,\tau \in H$. *Die binären Formen* $q\tau$ *und* $q\tau$ *sind genau dann äqui-*

a

b

valent, wenn es $A =$

$\in SL(2\ ,\ \mathrm{Z})$ *gibt, so daß*

c

d

$a\tau + b$

τ

$= c\tau + d$

Beweis Wie oben schreiben wir

$a\tau + b$

$\phi A(\ \tau\ ) = c\tau + d$

Nun gilt

q

$a\tau + b$

ϕ

| 2

$A(\tau)(x_1, x_2)$

$=$

$|x_1 + x_2 \phi A(\tau)|_2 = |x_1 + x_2 c\tau + d$

$=$

1

$|c\tau + d|_2 |(dx_1 + bx_2) + (cx_1 + ax_2)\tau|_2 =$

1

$|c\tau + d|_2 q_\tau \circ (A)^{-1}(x_1, x_2)$

wobei

a

$-b$

1

0

$A =$

$-$

$=$

$\circ A \circ 1$

0

c

d

0

− 1

0

− 1

1

0

Die Abbildung $A \to$

a

$-b$

−

=

$\circ A \circ$ 1

0

ist ein Isomorphis-

c

d

0

− 1

0

− 1

mus von $SL(2, \mathbb{Z})$ auf sich. Deshalb folgt Lemma 51 aus der obigen Rechnung.

✷

Um eine Normalform für binäre quadratische Formen zu finden, genügt es also, eine

Teilmenge F von H zu finden, so daß jede Bahn der $SL(2\ ,\ \mathrm{Z})$-Operation auf H die

Menge F in genau einem Punkt trifft. Nach Lemmata 50 und 51 ist dann jede binäre

quadratische Form zu genau einer Form $q\tau$ mit $\tau \in F$ äquivalent. Eine Menge F mit

den obigen Eigenschaften nennt man einen *Fundamentalbereich* für die Operation

von $SL(2\ ,\ \mathrm{Z})$ auf H. Um einen solchen Fundamentalbereich anzugeben, setzen wir

zunächst (siehe Bild 3.47)

$F :=$

$\tau \in H$

$|\tau| \geq 1$ und $-1 \leq \mathrm{Re}\ \tau \leq 1$

2

2

F

τ ’

τ

1

1

τ ’

τ

2

2

-1

-1/2

0

1/2

1

Bild 3.47

.
.
.
.
.
.
.

3.5 Ergänzungen zu Kapitel 3

159

Lemma 52 *(i) F¨*

ur jedes $\tau \in H$ *gibt es* $A \in SL(2, \mathbb{Z})$ *so daß* $\phi A(\tau) \in F$.

(ii) Sind τ, τ *zwei verschiedene Punkte von F und ist* $\tau = \phi A(\tau)$ *für ein* $A \in$

$SL(2, \mathbb{Z})$ *, so ist* $\operatorname{Im} \tau = \operatorname{Im} \tau$ *und es liegt einer der folgenden drei Fälle vor (siehe*

Bild 3.47)

a) $\operatorname{Re} \tau = -1$,

$Re\ \tau = + 1$

2

2

b) $Re\ \tau = + 1$,

$Re\ \tau = - 1$

2

2

c) $|\tau| = |\tau\ | = 1$

und $\tau = - 1 /\tau$

Bevor wir Lemma 52 beweisen, formulieren wir die oben erwähnte Folgerung für

binäre quadratische Formen

Satz 3.9 *Jede bin¨*

are quadratische Form mit positiver Diskriminante ist ¨

aquivalent

zu einer und nur einer Form $q\tau$ *mit*

$- 1 < Re\ \tau \leq 1$, $|\tau| \geq 1$

2

2

und $Re\ \tau$

≥ 0 falls $|\tau| = 1$

Lemma 52 kann man natürlich beweisen, indem man die Operation von $SL(2, \mathbb{Z})$

auf H sorgfältig untersucht (siehe z.B. [Lang] ch.3.1). Wir wählen hier einen geome-

trischeren Zugang und formulieren das Problem der Klassifikation definiter quadra-

tischer Formen um in das Problem der Klassifikation von Gittern in $\mathbb{C}$.

Definition 53 *i) Ein* Gitter *in* $\mathbb{C}$ *ist eine Teilmenge von* $\mathbb{C}$ *der Form*

$\Gamma =$

$m\omega_1 + n\omega_2 \; m,n \in \mathbb{Z}$

wobei ω_1, ω_2 *über* $\mathbb{R}$ *linear unabhängige Vektoren in* $\mathbb{C}$ *sind. Hier fassen wir* $\mathbb{C}$ *als*

zweidimensionalen $\mathbb{R}$ - *Vektorraum auf. (siehe Bild 3.48).*

ω_2

$2\omega + \omega$

ω_1

ω_2

ω_0

ω_1

Bild 3.48

ii) Zwei Gitter Γ , Γ *in* $\mathbb{C}$ *heißen* äquivalent , *wenn es eine von* 0 *verschiedene kom-*

plexe Zahl λ *gibt, so daß*

Γ

$=$

$\lambda\gamma$

$\gamma \in \Gamma$

iii) Ist Γ *ein Gitter in* C *, so bilden zwei Elemente* ω *,*$\omega \in \Gamma$ *eine* Basis des Gitters ,

1

2

falls

$\Gamma =$

$m\omega + n\omega$

$m,n \in$ Z

1

2

.

Bemerkungen: i) Ist Γ ein Gitter in C und λ eine von 0 verschiedene komplexe Zahl,

so schreiben wir

$\lambda \cdot \Gamma :=$

$\lambda\gamma$

$\gamma \in \Gamma$

Zwei Gitter Γ , Γ sind also genau dann äquivalent, wenn es $\lambda \in C$ mit $\lambda = 0$ gibt,

so daß $\Gamma = \lambda \cdot \Gamma$. Schreibt man $\lambda = rei\phi = r(\cos \phi + i \sin \phi)$, so sieht man, daß das Gitter $\lambda \cdot \Gamma$ aus dem Gitter Γ durch Drehen um den Winkel ϕ und anschließendes

Strecken um den Faktor r hervorgeht.

ii) Sind ω 1 ,ω 2 und ω ,ω Basen ein und desselben Gitters Γ, so lassen sich ω und

1

2

1

ω als ganzzahlige Linearkombination von ω

2

1 und ω 2 schreiben, und umgekehrt. Das

a

b

zeigt, daß es in diesem Fall eine Matrix

mit ganzzahligen Einträgen gibt,

c

d

deren Inverse ebenfalls ganzzahlige Einträge hat, so daß

ω

=

$a\omega$

1

$1 + b\omega$ 2

ω

=

$c\omega$

2

$1 + d\omega$ 2

Wir sagen, eine Basis ω 1 ,ω 2 eines Gitters sei eine *orientierte Basis*, wenn man ω 1

entgegen dem Uhrzeigersinn um einen Winkel α mit $0 < \alpha < 180$ *o* drehen kann, um

ein Vielfaches von ω 2 zu erhalten.

ω2

0

ω1

Bild 3.49

In diesem Fall ist ω 2 = $rei\alpha \cdot \omega$ 1 mit einem $r > 0$, das heißt Im ω 2 /ω 1 > 0 .

Umgekehrt überlegt man sich leicht, daß eine Basis ω 1 ,ω 2 von Γ \ { 0 } genau dann

eine orientierte Basis von Γ ist, wenn Im ω 2 /ω 1 > 0. Ist ω 1 ,ω 2 eine orientierte Basis von Γ, so bilden zwei andere Elemente ω ,ω von Γ \ { 0 } genau

dann ebenfalls eine

1

2

a

b

orientierte Basis von Γ, wenn es A =

∈ SL(2 , Z) gibt, so daß

c

d

ω

=

$a\omega$

1

1 + $b\omega$ 2

ω

=

$c\omega$

2

1 + $d\omega$ 2

..

Ubungen: i) Sei Γ ein Gitter in C und ω 1 ,ω 2 eine Basis von Γ. Dann hat die

quadra-

tische Form

$(x_1, x_2) \longmapsto |x_1\omega_1 + x_2\omega_2|^2$

positive Diskriminante!

ii) Seien Γ und Γ zwei Gitter in $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, daß die folgenden drei Aussagen

äquivalent sind:

a) Γ und Γ sind als Gitter äquivalent,

b) Für jede orientierte Basis ω_1, ω_2 von Γ und ω, ω von Γ sind die quadratischen

1

2

Formen

.

.

.

.

3.5 Ergänzungen zu Kapitel 3

$(x_1, x_2) \longmapsto |x_1\omega_1 + x_2\omega_2|^2$ und

$(x_1, x_2) \longmapsto |x_1\omega + x$

$|^2$

1

$2\omega_2$

äquivalent,

c) Es gibt orientierte Basen ω_1, ω_2 von Γ und ω, ω von Γ so daß die quadratischen

1

2

Formen

$(x_1, x_2) \longmapsto |x_1 \omega_1 + x_2 \omega_2|_2$ und

$(x_1, x_2) \longmapsto |x_1 \omega + x$

$|_2$

1

2 ω_2

äquivalent sind!

Für $\tau \in H$ sei Γ_τ das Gitter

$\Gamma_\tau := \mathbb{Z} \cdot 1 + \mathbb{Z} \cdot \tau$

Offenbar bilden 1 und τ eine orientierte Basis des Gitters Γ_τ. Die obige Übung

und Lemma 50 zeigen, daß man eine Bijektion zwischen der Menge der Äquiva-

lenzklassen von Gittern in $\mathbb{C}$ und der Menge der Äquivalenzklassen definiter binärer

quadratischer Formen erhält, wenn man einem Gitter die Äquivalenzklasse der Form

$(x_1, x_2) \to |x_1 \omega_1 + x_2 \omega_2|_2$ zuordnet, wobei ω_1, ω_2 irgendeine orientierte Basis von Γ

ist. Den Beweis von Lemma 52 bereiten wir nun mit einer Reihe von

Teilbehaup-

tungen vor:

(1) *Ein Gitter* Γ *ist* ¨

aquivalent zu dem Gitter $\Gamma\ \tau$ *genau dann, wenn es eine ori-*

entierte Basis $\omega\ 1\ ,\omega\ 2$ *von* Γ *gibt, so daß* $\omega\ 2\ /\omega\ 1 = \tau$.

Beweis Ist Γ äquivalent zu $\Gamma\ \tau$, so gibt es $\lambda \in C$, $\lambda = 0$ so daß $\Gamma = \lambda \cdot \Gamma\ \tau$. Dann

bilden $\omega\ 1 = \lambda$ und $\omega\ 2 = \lambda \cdot \tau$ eine orientierte Basis von Γ. Ist umgekehrt $\omega\ 1\ ,\omega$
2 eine orientierte Basis von Γ, mit $\omega\ 2\ /\omega\ 1 = \tau$, so ist

$1 \cdot$

1

$\Gamma =$

$(Z \cdot \omega$

ω

$1 + Z \cdot \omega\ 2) = Z \cdot 1 + Z \cdot \omega\ 2\ /\omega\ 1 = \Gamma\ \tau$

1

$\omega\ 1$

also sind Γ und $\Gamma\ \tau$ äquivalent.

✷

(2) *Sind* $\tau,\tau \in H$, *so sind die Gitter* $\Gamma\ \tau$ *und* Γ *genau dann*

τ

¨

aquivalent, wenn es

$A \in SL(2, \mathbb{Z})$ *gibt, so daß* $\tau = \phi A(\tau)$.

Beweis Γ_τ und Γ sind nach Teilbehauptung (1) genau dann

τ

äquivalent, wenn es

eine orientierte Basis ω_1, ω_2 von Γ_τ gibt, so daß $\omega_2/\omega_1 = \tau$. Orientierte Basen von a

b

Γ_τ sind von der Form $\omega_1 = d + c\tau$, $\omega_2 = b + a\tau$ mit

$\in SL(2, \mathbb{Z})$. Dann ist

c

d

$\tau = \omega_2/\omega_1 = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} = \phi A(\tau)$.

✷

(3) *Ist* $\tau \in H$, *so ist* $\tau \in F$ *genau dann, wenn* 1 *ein Element minimaler Länge*

in $\Gamma_\tau \setminus \{0\}$ *ist und* τ *ein Element minimaler Länge unter allen von* 1 *reell linear*

unabh¨

angigen Elementen von Γ_τ *ist.*

Beweis Sei zunächst $\tau \in F$. Jedes von 1 linear unabhängige Element w von $\Gamma\tau$ ist

von der Form

$w = m\tau + n$

mit $m,n \in \mathbb{Z}$, $m = 0$

Ist $|m| \geq 2$, so ist

$|w|^2 \geq m^2(\operatorname{Im}\tau)^2 \geq 4(\operatorname{Im}\tau)^2 > (\operatorname{Re}\tau)^2 + (\operatorname{Im}\tau)^2 = |\tau|^2$

√

denn für $\tau \in F$ ist $|\operatorname{Re}\tau| \leq \frac{1}{2} < \frac{1}{2}\sqrt{3} \leq |\operatorname{Im}\tau|$.

Ist $|m| = 1$, so ist $|\operatorname{Im} w| = |\operatorname{Im}\tau|$ und $|\operatorname{Re} w| = |\operatorname{Re}\tau + n| \geq |\operatorname{Re}\tau|$, da ja $-\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re}\tau \leq \frac{1}{2}$.

In beiden Fällen ist also

$|w| \geq |\tau| \geq 1$

Dies zeigt, daß τ unter allen von 1 linear unabhängigen Elementen von $\Gamma\ \tau$ minimale

Länge hat, und daß alle von 1 linear unabhängigen Elemente auch mindestens Länge

1 haben. Die Vielfachen von 1 in $\Gamma\ \tau \setminus \{\ 0\ \}$ haben trivialerweise mindestens Länge 1.

Sei nun τ /

$\in F$. Falls $|\ \mathrm{Re}\ \tau| > 1$, so gibt es $n \in \mathrm{Z}$ so, daß $|\ \mathrm{Re}\ \tau + n| \leq 1$. Dann liegt 2

2

$\tau + n$ in $\Gamma\ \tau$ und hat kleinere Länge als τ . Außerdem ist $\tau + n$ von 1 linear unabhängig, also hat τ unter den von 1 linear unabhängigen Elementen von $\Gamma\ \tau$ nicht minimale

Länge. Falls $|\tau| < 1$, so ist 1 nicht von minimaler Länge unter allen Elementen von

$\Gamma\ \tau \setminus \{\ 0\ \}$.

✷

Wir kommen nun zum *Beweis von Lemma 52*:

Sei zunächst $\tau \in H$. Wir wollen zeigen, daß es $A \in SL(2\ ,\ \mathrm{Z})$ gibt, so daß $\phi A(\ \tau) \in F$.

Nach Teilbehauptung (2) genügt es zu zeigen, daß $\Gamma\ \tau$ zu einem Gitter $\Gamma\ \tau$ mit $\tau \in F$

äquivalent ist. Dazu wählen wir zunächst einen Vektor ω 1 in $\Gamma\ \tau \setminus \{\ 0\ \}$ minimaler

Länge. Schreibe

$\omega 1 = a + b\tau$

mit $a,b \in Z$

a und b sind teilerfremd, denn wäre $T \geq 2$ ein gemeisamer Teiler von a und b, so wäre

$a + b\,\tau$ ein Element von Γ

T

T

$\tau \setminus \{ 0 \}$, das kürzer als $\omega 1$ wäre. Bekanntlich läßt sich der

größte gemeinsame Teiler zweier ganzer Zahlen als ganzzahlige Linearkombination

dieser Zahlen darstellen (vgl. [Courant–Robbins], Ergänzungen zu Kapitel 1, § 4).

Also gibt es $d,c \in Z$ so daß $ad - bc = 1$. Setze

$\omega 2 = c + d\tau$

Dann ist $\omega 1 ,\omega 2$ eine orientierte Basis von $\Gamma\ \tau$. Wir setzen

τ

$= \omega 2 /\omega 1$

Nach Teilbehauptung (1) sind die Gitter $\Gamma\ \tau$ und $\Gamma\ \tau$

äquivalent, weil sie durch

Multiplikation mit $1 /\omega 1$ ineinander übergehen. Deshalb ist 1 ein Element minimaler

Länge in $\Gamma\ \tau \setminus \{ 0 \}$. Für jedes $n \in Z$ ist $\Gamma\ \tau = \Gamma\ \tau + n$. Wir wählen n so, daß der Realteil von

τ

$:= \tau + n$

.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.

3.5 Ergänzungen zu Kapitel 3

163

zwischen − 1 und 1 liegt. Da 1 minimale Länge hat, ist $|\tau| \geq 1$, also ist $\tau \in F$.

2

2

Damit ist der erste Teil von Lemma 52 gezeigt.

Seien nun $\tau,\tau \in F$ verschiedene Punkte, die im gleichen $SL(2, Z)$-Orbit liegen. Nach

Teilbehauptung (2) sind dann $\Gamma\tau$ und $\Gamma\tau$ äquivalent. Folglich gibt es eine orientierte

Basis ω_1, ω_2 von $\Gamma\tau$, so daß $\tau = \omega_2/\omega_1$. Wegen Teilbehauptung (3) ist ω_1 ein Vektor minimaler Länge in $\Gamma\tau \setminus \{0\}$, und ω_2 ist von minimaler Länge unter allen von ω_1

linear unabhängigen Vektoren in Γ_τ . Insbesondere ist

$|\omega_1| = 1$

da ja 1 auch ein Vektor minimaler Länge in Γ_τ ist.

1.Fall: $\omega_1 = \pm 1$. Indem wir eventuell (ω_1, ω_2) durch $(-\omega_1, -\omega_2)$ ersetzen, können wir annehmen, daß $\omega_1 = 1$. Dann ist $\tau = \omega_2$ von der Form

τ

$= a\tau + b$

mit $a,b \in \mathbb{Z}$

Da 1 und τ

eine Basis von Γ_τ bilden und Im τ

> 0, ist $a = 1$. Da $-1 \leq$

2

Re τ, Re $\tau \leq 1$, folgt, daß $\tau = \tau \pm 1$ und daß $|\mathrm{Re}\,\tau| = |\mathrm{Re}\,\tau| = 1$.

2

2

2.Fall: $\omega_1 = \pm 1$. Weil ω_1 von 1 linear unabhängig ist, ist nach Teilbehauptung (3)

$|\tau| \leq |\omega_1| = 1$, also ist

$|\tau| = |\omega_1| = 1$

√

Ist $\tau = \pm 1 + i\sqrt{3}$, so sind ± 1 und $\pm\tau$ die einzigen Vektoren der Länge 1 in Γ

2

2

τ .

In diesem Fall können wir annehmen, daß ω 1 = τ. Dann ist − 1 das einzige von

ω 1 linear unabhängige Element der Länge 1, das mit ω 1 = τ eine orientierte Basis

bildet. Folglich ist ω 2 = − 1 und somit τ = − 1 /τ .

τ

-1

0

1

Bild 3.50

√

Ist τ = ± 1 + i 3 , so enthält Γ

2

2

τ genau sechs Elemente der Länge 1. Γ τ ist das

√

hexagonale Gitter. Wie oben zeigt man, daß auch τ = ± 1 + i 3 . Damit ist der Be-

2

2

weis von Lemma 52 und somit auch des Satzes über Normalformen definiter binärer

quadratischer Formen beendet.

✷

..

Ubung: (i) Zeigen Sie, daß es für jede positiv definite quadratische Form q ein Paar

(x_1, x_2) ganzer Zahlen gibt, so daß

.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.

F

$\tau = 1/2 + i/2$ 3

τ

-1/2

0

1/2

Bild 3.51

$0 < q(x_1, x_2) \leq 2$

√

$D(q)$

3

(ii) Zeigen Sie, daß es für jede irrationale Zahl α unendlich viele Paare $(m,n) \in$ Z2

mit $n = 0$ gibt, so daß

1

$\alpha - m \leq 2$

√

n

3 n 2

Hinweis: Betrachten Sie für jedes $\varepsilon > 0$ die quadratische Form

2

$q(x_1, x_2) =$

$\alpha n - m$

$+ \varepsilon 2 n 2$

ε

und wenden sie (i) an!

Man kann zeigen, daß man die Konstante 2

√

in (ii) durch 1

√

ersetzen kann, für

3

5

allgemeine α ist aber 1

√ optimal. Siehe [Hardy–Wright], Kapitel XI !

5

3.5.4

Elliptische Geometrie

Neben der euklidischen und der hyperbolischen Ebene spielt bei der Diskussion

des Parallelenaxioms eine dritte zweidimensionale Geometrie, die sogenannte ellip-

tische Geometrie, eine wichtige Rolle. Wir beschreiben hier die dieser Geometrie

zugrundeliegende Punktmenge, das System von Geraden“, sowie die Kongruenz

”

”

von Strecken“. Zunächst definieren wir eine Äquivalenzrelation ∼ auf der 2-Sphäre

S 2 :=

(x 1 ,x 2 ,x 3) ∈ R3 x 2 + x 2 + x 2 = 1

1

2

3

durch

$\mathbf{x} \sim \mathbf{x}$

$\Longleftrightarrow$

$\mathbf{x} = \pm\mathbf{x}$

Die Menge $S\,2\,/\sim$ der Äquivalenzklassen nennt man die (reelle) *projektive Ebene*

P2(R). Dies ist die Punktmenge der elliptischen Geometrie. Sei

$\pi : S\,2 \longrightarrow \mathrm{P2(R)}$

.

die Abbildung, die jedem Punkt $\mathbf{x} \in S\,2$ seine Äquivalenzklasse $[\mathbf{x}]$ zuordnet. Als

Geraden nehmen wir die Bilder von Großkreisen auf $S\,2$. Genauer sei G das System

von Teilmengen von P2(R) der Form

π

$\mathbf{x} \in S\,2\ a\,1\,x\,1 + a\,2\,x\,2 + a\,3\,x\,3 = 0$

mit $(\,a\,1\,,a\,2\,,a\,3) \in \mathrm{R3} \setminus \{\,0\,\}$. Die projektive Ebene P2(R) und ihre Geraden werden wir in anderem Zusammenhang auch in Abschnitt 4.7.6 diskutieren. Hier geht es

darum, daß man in dieser Geometrie auch in sinnvoller Weise einen Kongruenzbegriff

für Strecken und Winkel definieren kann. Zunächst aber stellen wir fest, daß in

dieser Geometrie die Kongruenzaxiome (I1), (I2) und (I3) gelten. Wir überlassen

die Verifikation von (I2) und (I3) den LeserInnen als Übung und prüfen nur (I1)

nach, nämlich, daß es für zwei verschiedene Punkte [**x**] , [**x**] von P2(R) genau ein

$g \in G$ gibt, so daß [**x**] , [**x**] $\in g$. Seien also [**x**] , [**x**] mit **x** , **x** $\in S$ 2 zwei verschiedene Punkte von P2(R). Dann ist **x** = ±**x**, also gibt es genau einen Großkreis K auf S 2,

der die Punkte **x** und **x** enthält. Die Punkte −**x** und −**x** liegen ebenfalls auf K.

Die Menge $\pi(K)$ liegt in G, und nach Konstruktion sind [**x**] , [**x**] $\in \pi(K)$. Ist K

ein weiterer Großkreis mit [**x**] , [**x**] $\in \pi(K)$, so liegt jeweils mindestens einer der

beiden Punkte **x** und −**x** bzw. **x** und −**x** auf K . Da K durch die Punktspiegelung an 0 in sich überführt wird, liegen alle vier Punkte **x** , **x** , − **x** , − **x** auf K . Also ist $K = K$. In der elliptischen Geometrie gelten, wie oben gesagt, die Inzidenz-S2

-x’

-x

x

x’

Bild 3.52

axiome (I1), (I2), (I3). Andererseits ist es in dieser Geometrie so, daß sich je zwei

Geraden schneiden. Sind nämlich $g,g \in G$, so gibt es Großkreise K,K auf S 2,

so daß $g = \pi(K)$, $g = \pi(K)$. Die beiden Großkreise auf S 2 schneiden sich in einem Punkt $\mathbf{x}$. Dann ist $\pi(\mathbf{x}) \in g \cap g$. Die Elemente von G sind als Bilder von

Großkreisen wieder kreisförmig“. Ist K ein Großkreis und $\mathbf{x} \in K$, so gelangt man

”

bei einer Wanderung von $\mathbf{x}$ ausgehend in einer der beiden Richtungen auf dem

Großkreis entlang irgendwann zum Punkt $-\mathbf{x}$. Geht man also von $[\mathbf{x}]$ aus auf $\pi(K)$ in

irgendeine Richtung, so kommt man wieder zum Ausgangspunkt $[\mathbf{x}] = [-\mathbf{x}]$ zurück.

Das zeigt, daß es nicht möglich ist, in sinnvoller (d.h. mit π kompatibler) Weise eine

Zwischenbeziehung so zu definieren, daß (L3) gilt. Kongruenz von Strecken kann

man wieder unter Bezugnahme auf eine Gruppenoperation, nämlich die von $SO(3)$

.

auf S 2 definieren. Wir sagen, die Strecken $[\mathbf{x}][\mathbf{y}]$ und $[\mathbf{x}\ ][\mathbf{y}\ ]$ mit $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in S$ 2

seien kongruent, wenn es $\phi \in SO(3)$ gibt, so daß

$$\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$$

und

$$\phi(\mathbf{y}) = \pm\mathbf{y} .$$

Winkel und Kongruenz von Winkeln definiert man in der elliptischen Geometrie

etwas anders, als wir das bei der euklidischen und hyperbolischen Ebene getan ha-

ben, denn ohne den Begriff ”zwischen” ist auch der Begriff ”Strahl” nicht definiert.

Das ist aber nur eine Frage von Definitionen; unter Verwendung der Winkelmessung

auf S 2 kann man eine Winkelmessung in der elliptischen Geometrie definieren, die

mit der Operation von $SO(3)$ verträglich ist. Damit entsteht dann eine interessante

Geometrie, die viele Sätze mit der euklidischen Geometrie gemeinsam hat, sich aber

doch substantiell von ihr unterscheidet. Ausführliche Untersuchungen dieser Geome-

trie findet man z.B. in [Berger] ch.18, [Greenberg] appendix A, [Nöbeling] Kap. III.

Natürlich hängt die elliptische Geometrie eng mit der Geometrie auf der Kugelober-

fläche zusammen. Eine schöne Diskussion der sphärischen Geometrie findet sich in

[Jennings], Kapitel II.

4

Kegelschnitte

Kurven in der Ebene sind seit Alters her ein wichtiger Untersuchungsgegenstand der

Geometrie. Neben den Geraden, die für sich betrachtet recht trivial sind, fand

man

als nächst kompliziertere Typen von Kurven die Ellipsen (einschließlich der Kreise),

die Parabeln und die Hyperbeln. In der griechischen Mathematik erkannte man

als vereinheitlichendes Prinzip, daß gerade diese drei Typen von Kurven entstehen,

wenn man einen (rotationssymmetrischen) Kegel mit einer Ebene schneidet, die nicht

durch die Spitze des Kegels geht, und daß jede Ellipse, Parabel oder Hyperbel auf

diese Weise erhalten werden kann. Aus diesem Grund nennt man Ellipsen, Parabeln

und Hyperbeln auch Kegelschnitte.

Bild 4.1

Wir wollen hier den analytischen Standpunkt einnehmen, das heißt, cartesische

Koordinaten in der Ebene einführen und geometrische Figuren als Teilmengen von

R2 beschreiben. Der Abstand zwischen zwei Punkten $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ und $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$

von R2 ist also $\mathbf{x} - \mathbf{y} =$

$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2$ (vgl. Abschnitt 2.1). Auch bei

dieser Betrachtungsweise gibt es ein einheitliches Prinzip, mit dem man Ellipsen,

Parabeln und Hyperbeln erfassen kann: Sie sind nämlich Nullstellenmengen von

Gleichungen zweiten Grades. Dies verwenden wir als Definition.

Definition 54 *Ein* Kegelschnitt *ist eine Teilmenge von* R2 *der Form*

$C = (x 1 ,x 2) \in$ R2 | a 11 x 2 + 2 a

+ b

1

12 x 1 x 2 + a 22 x 2

2

1 x 1 + b 2 x 2 + c = 0

wobei a 11 , a 12 , a 22 , b 1 , b 2 , c *reelle Zahlen sind und mindestens eine der drei Zahlen* a 11 , a 12 , a 22 *von Null verschieden ist.*

Der Vollständigkeit halber definieren wir noch

Definition 55 *Eine* Gerade *ist eine Teilmenge von* R2 *der Form*

.

168

4 Kegelschnitte

$g = (x 1 ,x 2) \in$ R2 | a 1 x 1 + a 2 x 2 + b = 0

mit a 1 , a 2 , $b \in$ R , a 2 + a 2 > 0 .

1

2

..

Ubung: Sei g eine Gerade in R2, $\mathbf{x} \in g$. Zeigen Sie, daß es $\mathbf{v} \in$ R2 \ { 0 } gibt, so daß $g = \{\mathbf{x} + t\mathbf{v} \mid t \in$ R }! $\mathbf{v}$ ist bis auf Multiplikation mit einer von Null verschiedenen Zahl durch g bestimmt und wird *Richtungsvektor* von g genannt.

4.1

Normalformen

Um Kegelschnitte zu untersuchen, ist es nützlich, einen Koordinatenwechsel durch-

zuführen, der ihre Gleichungen in eine einfachere Form bringt. Als Koordinaten-

wechsel verwenden wir *Translationen*, d.h. Abbildungen der Form

$R2 \to R2$

$(x_1, x_2) \to (x_1 + v_1, x_2 + v_2)$

mit einem Vektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ in R2, und *Drehungen* um (0 , 0), d.h. Abbildungen der

Form

$R2 \to R2$

$(x_1, x_2) \to (x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha, x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha)$ mit $\alpha \in R$, und Hintereinanderschaltungen solcher Abbildungen. Eine derartige

Abbildung hat die Form

$R2 \to R2$

$(x_1, x_2) \to (x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha + v_1, x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha + v_2)$ mit $\alpha, v_1, v_2 \in R$. Wir nennen solche Abbildungen *orientierungserhaltende Kongruenzen*.

..

Ubung: Zeigen Sie:

i) Orientierungserhaltende Kongruenzen sind bijektiv!

ii) Die Hintereinanderschaltung zweier orientierungserhaltender Kongruenzen so-

wie die Inverse einer orientierungserhaltenden Kongruenz ist eine orientie-

rungserhaltende Kongruenz!

iii) Ist $\phi : \mathrm{R}2 \to \mathrm{R}2$ eine orientierungserhaltende Kongruenz und sind $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathrm{R}2$,

so ist $\phi(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{y}) = \mathbf{x} - \mathbf{y}$!

.

.

.

.

.

4.1 Normalformen

Die Teile i) und ii) der Übung zeigen, daß die Menge der orientierungserhaltenden

Kongruenzen mit der Hintereinanderschaltung von Abbildungen als Verknüpfung ei-

ne Gruppe bildet. Nach Satz 1.1 und Bemerkung 4 sind die orientierungserhaltenden

Kongruenzen gerade die orientierungserhaltenden Isometrien der Ebene. Wir wollen

jedoch die Resultate von Kapitel 1 hier nicht verwenden. Deswegen verwenden wir

eine andere Bezeichnung.

In diesem Abschnitt geben wir Normalformen für Kegelschnitte an. Das ist eine

Liste von Kegelschnitten, so daß sich jeder beliebige Kegelschnitt durch eine orien-

tierungserhaltende Kongruenz auf einen Kegelschnitt aus dieser Liste abbilden läßt.

..

Ubung: Sei ϕ eine orientierungserhaltende Kongruenz, g eine Gerade in R2 und C

ein Kegelschnitt. Zeigen Sie, daß $\phi(g)$ wieder eine Gerade und $\phi(C)$ wieder ein

Kegelschnitt ist!

Es folgt nun zunächst die Liste der Normalformen und dann der Satz, daß sich

jeder Kegelschnitt in Normalform bringen läßt.

(Keg.1)

Für a 1, a 2 > 0 sei

x 2

x 2

E

1

2

a

:=

(x

+

= 1

1 ,a 2

1 ,x 2) ∈ R2

a 2

a 2

1

2

x2

a2

Ea1,a2

-a

x1

1

a1

-a2

Bild 4.2

Ea

ist eine *Ellipse* , die die *x*

1 ,*a* 2

1-Achse in den Punkten (±*a* 1 , 0) und die *x* 2-Achse

in den Punkten (0 , ± *a* 2) schneidet. Die Koordinatenachsen sind Symmetrieachsen

der Ellipse. Manchmal nennt man *a* 1 und *a* 2 die Hauptachsen“ der Ellipse. Falls

”

a 1 = *a* 2, so ist *Ea*

der *Kreis* um (0 , 0) mit Radius *a*

1 ,*a* 2

1 = *a* 2.

(Keg.2)

Für *a* 1, *a* 2 > 0 sei

x 2

H

1

a

:=

(*x*

− *x* 22 = 1

1 ,*a* 2

1 ,*x* 2) ∈ R2

a 2

a 2

1

2

.

.

.

.

.

.

.
.
.
.
.
.
.

170

4 Kegelschnitte

x2

Asymptotenlinie

H a1,a2

x1

-a1

a1

Bild 4.3

Ha

ist eine *Hyperbel* . Die Geraden

1 ,*a* 2

x

(*x*

1

1 ,*x* 2) ∈ R2

− *x* 2 = 0

(4.1)

a 1

a 2

und

x

x

(x

1

2

1 ,x 2) ∈ R2

+

= 0

,

(4.2)

a 1

a 2

denen sich die Hyperbeläste beliebig stark nähern“, heißen die *Asymptotenlinien*

„

der Hyperbel.

(Keg.3)

Für $a > 0$ sei

$Pa := (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \; x_2 = a x_1^2$

Pa heißt *Parabel*.

(Keg.4)

Für $a_1, a_2 > 0$ sei

x

x

x

(GP)

:=

(x

$1 - x_2$

$1 + 2 = 0$

a_1, a_2

$_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

a_1

a_2

a_1

a_2

x_2

=

(x

1

1 ,x 2) ∈ R2

− x 22 = 0

a 2

a 2

1

2

(GP) a

nennt man *Geradenpaar*, es ist die Vereinigung der Geraden

1 ,a 2

x

(x

1

1 ,x 2) ∈ R2

− x 2 = 0

a 1

a 2

.

.

.

4.1 Normalformen

x2

Pa

x1

Bild 4.4

mit der Geraden

x

x

(x

1

2

1 ,x 2) ∈ R2

+

= 0

a 1

a 2

x2

(GP)a1,a2

x1

Bild 4.5

(Keg.5)

Für $a \geq 0$ sei

(P P) = (x

a

1 ,x 2) ∈ R2

(x 1 − a)(x 1 + a) = 0

Für a > 0 ist (P P) a ein Paar paralleler Geraden.

Für a = 0 ist (P P) eine *Doppelgerade*, d.h. (P P) ist die Gerade (x

a

a

1 ,x 2) ∈ R2 |

x 1 = 0 ; die Gleichung verschwindet aber mit Multiplizität zwei auf dieser Geraden.

(Keg.6)

(EP) = (x 1 ,x 2) ∈ R2 x 2 + x 2 = 0

1

2

nennt man *Einsiedlerpunkt*.

Allgemein nennt man Kegelschnitte, die Bilder einer Ellipse, Parabel, Hyperbel

etc. wie oben unter einer orientierungserhaltenden Kongruenz sind, wieder Ellipsen,

Parabeln, Hyperbeln etc.. Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln nennt man *nichtentar-*

tete Kegelschnitte.

x2

(PP)a

x1

(PP)a

Bild 4.6

..

Ubung: Ist C ein Kegelschnitt vom Typ (*Keg.m*) ($1 \leq m \leq 6$) und ist ϕ eine

orientierungsherhaltende Kongruenz, so daß $\phi(C)$ vom Typ (*Keg.n*), $1 \leq n \leq 6$ ist,

so ist $n = m$! Das heißt z.B. , daß es keine orientierungserhaltende Kongruenz gibt,

die eine Ellipse auf eine Hyperbel abbildet.

Satz 4.1 *Sei C ein nichtleerer Kegelschnitt. Dann gibt es eine orientierungserhal-*

tende Kongruenz ϕ, so daß $\phi(C)$ einer der Kegelschnitte (Keg.1)–(Keg.6) ist.

Zum Beweis von Satz 4.1 betrachten wir zunächst *quadratische Formen* in zwei

Variablen (oder, wie man auch sagt, *bin*¨

are quadratische Formen). Das sind Abbil-

dungen

q : R2 → R

(x 1 ,x 2) → (a 11 x 2 + 2 a

)

1

12 x 1 x 2 + a 22 x 2

2

mit a 11, a 12, a 22 ∈ R. Ist q(x 1 ,x 2) = a 11 x 2+2 a eine solche quadratische

1

12 x 1 x 2+ a 22 x 2

2

Form mit a 11 = 0, so ist

a

a

q(x

12

12

1 ,x 2) = a 11(x 2 + 2

x

x

x 2 + a

1

a

1 x 2 + (

2)2) − a 2

12 2

22 x 2

2

11

a 11

a 11

a

1

= a

12

11(x 1 +

x

(a

) x 2

a

2)2 +

11 a 22 − a 2

12

2

11

a 11

Diese Rechnung zeigt, daß bei der Untersuchung quadratischer Formen die Größe

$D(q) := a_{11} a_{22} - a_{212}$

eine wichtige Rolle spielt. Sie heißt die *Diskriminante* von q.

Lemma 56 *Sei*

$q(x_1, x_2) = a_{11} x_2 + 2 a$

1

$12 x_1 x_2 + a_{22} x_2$

2

eine quadratische Form in zwei Ver¨

anderlichen.

.

.

.

4.1 Normalformen

173

i) Ist $D(q) = 0$ *, so gibt es eine Drehung* R *um* $(0, 0)$ *in* $\mathbb{R}^2$ *und* a *,* $a \in \mathbb{R}$ *mit* 1

2

$a \cdot a = D(q)$ *, so daß*

1

2

$(q \circ R)(x_1, x_2) = a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2$

ii) Ist $D(q) = 0$ *, so gibt es eine Drehung* R *um* $(0, 0)$ *in* $\mathbb{R}^2$ *und* $a \in \mathbb{R}$ *, so daß* $(q \circ R)(x_1, x_2) = a_{11} x_1^2$.

1

Beweis von Lemma 56 Ist $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$(x_1, x_2) \to (x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha, x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha)$, so ist

$(q \circ \psi)(x_1, x_2) = a_{11}(x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha)^2 + 2 a_{12}(x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha)(x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha)$

$+ a_{22}(x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha)^2$

$= [a_{11} \cos^2\alpha + 2 a_{12} \sin\alpha \cos\alpha + a_{22} \sin^2\alpha] x_1^2$

$+ 2 [-a_{11} \sin\alpha \cos\alpha + a_{12}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + a_{22} \sin\alpha \cos\alpha] x_1 x_2$

$+ [a_{11} \sin^2\alpha - 2 a_{12} \sin\alpha \cos\alpha + a_{22} \cos^2\alpha] x_2^2$.

2

Verwendet man die Rechenregeln für die Verdoppelung des Winkels bei trigonome-

trischen Funktionen

$\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha$,

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$,

sieht man, daß

$(q \circ \psi)(x 1 ,x 2) = [a 11 \cos 2 \alpha + a 12 \sin 2 \alpha + a 22 \sin 2 \alpha] x 21$

$+ (a 22 - a 11) \sin 2 \alpha + 2 a 12 \cos 2 \alpha] x 1 x 2$

$+ [a 11 \sin 2 \alpha - a 12 \sin 2 \alpha + a 22 \cos 2 \alpha] x 22$

Wähle nun α so, daß

$(a 22 - a 11) \sin 2 \alpha + 2 a 12 \cos 2 \alpha = 0$

(4.3)

Das ist möglich, denn für $a 11 - a 22 = 0$ hat die Gleichung

$\sin 2 \alpha$

$2 a$

$\tan 2 \alpha =$

$=$

12

$\cos 2 \alpha$

$a 11 - a 22$

eine Lösung α, und für $a 22 = a 11$ kann man $\alpha = 45 \circ$ nehmen.

Wir setzen nun

$a := a$

1

$11 \cos 2 \alpha + a 12 \sin 2 \alpha + a 22 \sin 2 \alpha$

$a := a$

2

11 sin2 α − a 12 sin 2 α + a 22 cos2 α

174

4 Kegelschnitte

Dann ist

(q ◦ ψ)(x 1 ,x 2) = a x 2 + a x 2

(4.4)

1 1

2 2

und

a a = a 2 + a 2) sin2 α cos2 α − a 2 sin2 2 α + a

1 2

11

22

12

11 a 22(cos4 α + sin4 α

+ a 12 sin 2 α a 11(sin2 α − cos2 α) + a 22(cos2 − sin2 α)

= (a 2 − 2 a

) sin2 α cos2 α − a 2 sin2 2 α

11

11 a 22 + a 2

22

12

+ a 11 a 22(cos4 α + 2 sin2 α cos2 α + sin4 α) + a 12(a 22 − a 11) sin 2 α cos 2 α.

Da

cos4 α + 2 sin2 α cos2 α + sin4 α = (cos2 α + sin2 α)2 = 1

und nach (4.3)

(a 11 − a 22) sin 2 α = 2 a 12 cos 2 α

ergibt sich

a a = (a

sin2 2 α + a

cos2 2 α

1 2

11 − a 22)2 sin2 α cos2 α − a 2

12

11 a 22 − 2 a 2

12

1

2

= a 11 a 22 − a 2 − a 2 cos2 2 α +

(a

12

12

2

22 − a 11) sin 2 α

= a 11 a 22 − a 2 = D(q)

12

wiederum nach (4.3).

Falls a = 0 so setze R := ψ. In diesem Fall folgt die Behauptung des Lemmas aus

1

(4.4). Falls a = 0, so ist D(q) = 0. In diesem Fall setze a := a , und R sei die Hinter-1

2

einanderschaltung von ψ und einer Drehung um 90 ◦. Dann ist (q ◦ R)(x 1 ,x 2) = a x 21

und Lemma 56 ist bewiesen.

✷

Korollar 57 *F¨*

ur eine quadratische Form q in zwei Variablen gilt

i) D(q) > 0 *genau dann, wenn* q(x 1 ,x 2) = 0 *für alle* (x 1 ,x 2) ∈ R2 \ (0 , 0) .

ii) D(q) = 0 *genau dann, wenn es eine Linearform*

(x 1 ,x 2) = ax 1 + bx 2 *mit*

$a_2 + b_2 = 0$ *gibt, so daß* $q(x_1, x_2) = \pm(x_1, x_2)^2$.

iii) $D(q) < 0$ *genau dann, wenn es* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *mit* $ad - bc = 0$ *gibt, so daß*

$q(x_1, x_2) = (ax_1 + bx_2)(cx_1 + dx_2)$.

Beweis Für die quadratischen Formen $a_1x_1^2 + a_2x_2^2$ ist diese Aussage einfach nach-

prüfbar. Also folgt Korollar 57 aus Lemma 56.

✷

Bemerkung 58

i) Das Vorzeichen der Diskriminante einer von Null verschiedenen quadratischen Form q in zwei Variablen kann man aus der Gestalt der Nullstellenmenge

$V := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid q(x_1, x_2) = 0\}$

ablesen. Aus Korollar 57 folgt nämlich, daß

- $D(q) > 0$ genau dann, wenn $V = \{(0, 0)\}$,
- $D(q) = 0$ genau dann, wenn V eine Gerade durch $(0, 0)$ ist,
- $D(q) < 0$ genau dann, wenn V Vereinigung zweier verschiedener Geraden

durch (0 , 0) ist.

ii) Man kann Korollar 57 mittels der quadratischen Ergänzung, wie wir sie vor Lemma 56 durchgeführt haben, direkt beweisen.

iii) Die Diskriminante der quadratischen Form $q(x 1 ,x 2) = a 11 x 2 + 2 a$

1

12 $x 1 x 2 +$

a

a

11

$a 12$

22 $x 2$ ist die Determinante der (2 × 2) Matrix

2

$a 12 a 22$

Beweis von Satz 4.1 Sei $C = (x 1 ,x 2) \in R2$ $f (x 1 ,x 2) = 0$ wobei

$f (x 1 ,x 2) = a 11 x 2 + 2 a$

$+ b$

1

$12 x 1 x 2 + a 22 x 2$

2

$1 x 1 + b 2 x 2 + c,$

mit $(a 11 ,a 12 ,a 22) = (0 , 0 , 0)$. Mit q bezeichnen wir die quadratische Form

$q(x 1 ,x 2) = a 11 x 2 + 2 a$

1

$12 x 1 x 2 + a 22 x 2$

2

Fall 1 $D(q) = 0$:

Nach Lemma 56 gibt es eine Drehung R und a , a , so daß $a \cdot a = D(q)$ und

1

2

1

2

$(q \circ R)(x 1 ,x 2) = a x 2 + a x 2$

1 1

2 2

Dann ist $f \circ R$ von der Form

$(f \circ R)(x 1 ,x 2) = a x 2 + 2 b x$

$x 2 + 2 b x$

1 1

$1 1 + a 2 2$

$2 2 + c$

mit b , $b \in$ R. Da $a \cdot a = 0$, ist die Translation

1

2

1

2

$T : (x_1, x_2) \to x_1 - b_1, x$

a

$2 - b_2$

a

1

2

wohldefiniert. Es gibt $c \in \mathbb{R}$ so daß

$(f \circ R \circ T)(x_1, x_2) = a_1 x_2 + a_2 x_2 - c$

1 1

2 2

Setze

$\phi := (R \circ T)^{-1}$.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

ϕ ist eine orientierungserhaltende Kongruenz, und

$\mathbf{x} \in \phi(C) \Longleftrightarrow \phi^{-1}(\mathbf{x}) \in C \Longleftrightarrow (f \circ R \circ T)(\mathbf{x}) = 0$

Also ist

$\phi(C) = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \; a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 = c$

Fall 1a: $c = 0$: Dann ist

$\phi(C) = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \; a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 = c$

Ist $D(q) > 0$, so haben a_1/c und a_2/c das gleiche Vorzeichen. Wenn dieses Vorzei-

chen negativ ist, so ist $\phi(C) = \emptyset$ und somit $C = \emptyset$. Wenn das Vorzeichen positiv ist,

so ist $\phi(C)$ die Ellipse

x_2

x 2

c

c

E

1

2

a

:=

(x

+

= 1

mit a

,

a

1 ,a 2

1 ,x 2) ∈ R2

a 2

a 2

1 :=

a

2 :=

a

1

2

1

2

Ist $D(q) < 0$, so haben a/c und a/c verschiedene Vorzeichen. Indem wir eventuell

1

2

ϕ durch die Hintereinanderschaltung von ϕ und einer Drehung um $90\circ$ ersetzen,

können wir annehmen, daß $a/c > 0$. Dann ist $\phi(C)$ die Hyperbel

1

c

Ha

:=

(x

$- x$ 22 = 1

mit a

,

a

1 ,a 2

1 ,x 2) ∈ R2 | x 2

1

a 2

a 2

1 :=

a

2 :=

− ca

1

2

1

2

Fall 1b: c = 0: Nach Bemerkung 58.i ist ϕ(C) ein Einsiedlerpunkt für D(q) > 0, und das Geradenpaar

x 2

1

GP

1

a

=

(x

− x 22 = 0

a

1 ,a 2

1 ,x 2) ∈ R2

j :=

a 2

a 2

1

2

aj

falls D(q) < 0.

Fall 2

D(q) = 0: Nach Lemma 56 gibt es eine Drehung R um (0 , 0) in R2 und

a ∈ R, a = 0, b , b ∈ R, so daß

1

2

(f ◦ R)(x 1 ,x 2) = a x 2 + 2 b x

x

1

1 1 + 2 b 2 2 + c.

Sei T 1 die Translation (x 1 ,x 2) → x 1 − (b /a) ,x

1

1

2 . Dann ist

$(f \circ R \circ T\ 1)(x\ 1\ ,x\ 2) = a\ x\ 2 + 2\ b\ x$

1

2 2 + c

mit $c \in$ R.

Fall 2a: $b = 0$: Sei T

) . Dann ist

2

2 die Translation $(x\ 1\ ,x\ 2) \rightarrow x\ 1\ ,x\ 2 - (c / 2\ b\ 2$

$(f \circ R \circ T\ 1 \circ T\ 2)(x\ 1\ ,x\ 2) = a\ x\ 2 + 2\ b\ x$

1

2 2 .

Setze

.

.

.

4.1 Normalformen

177

$(R \circ T$

< 0

$\phi :=$

$1 \circ T\ 2) - 1$

falls $a\ b\ 2$

$(R \circ T\ 1 \circ T\ 2 \circ S) - 1$ falls $a\ b > 0$

2

wobei S die Abbildung $(x\ 1\ ,x\ 2) \rightarrow (-x\ 1\ ,-x\ 2)$, d.h. die Drehung um $180\ \circ$, bezeichnet.

Dann ist

$\phi(C) = (x\ 1\ ,x\ 2) \in$ R2 $x\ 2 = ax\ 21$

mit $a := |a\ /\ 2\ b\ |$ eine Parabel in Normalform (Keg.3).

2

Fall 2b: $b = 0$: Sei $\phi := (R \circ T$

2

$1) - 1$. Haben a und c das gleiche Vorzeichen, so ist

$\phi(C)$ und somit auch C die leere Menge. Falls $c = 0$ ist oder a und c verschiedene Vorzeichen haben, so ist

c

$\phi(C) =$

$(x\ 1\ ,x\ 2) \in$ R2 $x\ 2 =$

1

a

ein Paar paralleler Geraden oder eine Doppelgerade wie in (Keg.5).

✷

Erg¨

anzung zu Satz 4.1.

Der obige Beweis zeigt auch folgendes: Ist

$C = (x 1 ,x 2) \in$ R2 a 11 x 2 + 2 a

+ b

1

12 x 1 x 2 + a 22 x 2

2

1 x 1 + b 2 x 2 + c = 0

ein nichtleerer Kegelschnitt und $D(q)$ die Diskriminante der quadratischen Form

$q(x 1 ,x 2) = a$ 11 x 2 + 2 a

,

1

12 x 1 x 2 + a 22 x 2

2

so ist

• $D(q) > 0$ genau dann, wenn C eine Ellipse oder ein Einsiedlerpunkt ist.

• $D(q) = 0$ genau dann, wenn C eine Parabel, ein Paar paralleler Geraden oder eine Doppelgerade ist.

• $D(q) < 0$ genau dann, wenn C eine Hyperbel oder ein Paar sich in einem

Punkt schneidender Geraden ist.

Bemerkung 59

i) Lemma 56 ist ein Spezialfall des Satzes über die Hauptach-

sentransformation quadratischer Formen (vgl. [Fischer] 1.5.9). In Abschnitt 5.1

formulieren wir diesen Satz für den Fall der Dimension 3, und geben einen geo-

metrischen Beweis. Dieser Beweis läßt sich nahezu wörtlich auf den Fall von

Dimension 2 übertragen und ergibt dann einen anderen Beweis von Lemma

56.

ii) Die trigonometrischen Funktionen bzw. Hyperbelfunktionen kann man verwen-

den, um Ellipsen bzw. Hyperbeln zu parametrisieren. Man prüft leicht nach,

daß folgendes gilt:

a) Die Abbildung

x 2

x 2

[0 , 360 ◦[→ E

1

2

a

:=

(x

+

= 1

,

1 ,a 2

1 ,x 2) ∈ R2

a 2

a 2

1

2

t → (a 1 sin t,a 2 cos t)

ist eine stetige Bijektion.

b) Die Abbildung

R →

x 2

H+

:=

(x

1 − x 22 = 1 , x

a 1 ,a 2

1 ,x 2) ∈ R2

a 2

a 2

1 > 0

,

1

2

t → (a 1 cosh t,a 2 sinh t)

ist ein Homöomorphismus.

c) Die Abbildung

R → Pa = (x 1 ,x 2) ∈ R2 x 2 = ax 2 ,

1

t → (t,at 2)

ist ein Homöomorphismus.

¨

Ubung: Zeigen Sie: Ist q eine quadratische Form in zwei Variablen und R eine Dre-

hung um (0 , 0) in R2, so ist $D(q \circ R) = D(q)$!

..

Ubung: Zeichnen Sie die Graphen von quadratischen Formen q bei verschiedener

Wahl der Koeffizienten a 11 , a 12 , a 22 ! Wie hängt der Graph qualitativ von $D(q)$ ab?

..

Ubung: Zeigen Sie, daß

$C = (x 1 ,x 2) \in$ R2 a 11 x 2 + 2 a

+ b

1

12 x 1 x 2 + a 22 x 2

2

1 x 1 + b 2 x 2 + c = 0

genau dann ein nichtentarteter Kegelschnitt ist, wenn

1

a 11 a 22 c + a

a

− 1 a

− a 2 c = 0 .

2 12 b 1 b 2 − 1

4 11 b 22

4 22 *b* 21

12

..

Ubung: Gegeben seien eine Ellipse *E* und eine Gerade *g*. Zeigen Sie, daß es eine

Gerade

mit der folgenden Eigenschaft gibt: Ist *g* eine zu *g* parallele Gerade, die

E in zwei Punkten schneidet, so liegt der Mittelpunkt dieser beiden Punkte auf !

Diese Gerade

heißt *der zur Richtung von g konjugierte Durchmesser.*

.

4.2 Brennpunkte und Brenngeraden

179

4.2

Brennpunkte und Brenngeraden

Wir beginnen mit der folgenden klassischen Beschreibung von Ellipsen.

Satz 4.2 *Seien* **f** = (*f* 1 ,*f* 2) *und* **f** = (*f* ,*f*) *zwei Punkte von* R2 , *und sei* 2 *r gr* 1

2

..

oßer

als der Abstand

f − f

von **f** *und* **f** . *Dann ist die Menge aller Punkte* **x** ∈ R2 ,

f¨

ur die die Summe des Abstandes

x − **f** *von* **x** *zu* **f** *und des Abstandes* **x** − **f**

von **x** *zu* **f** *gleich* 2 *r ist, eine Ellipse. Jede Ellipse kann auf diese Weise beschrieben*

werden. Die Punkte **f** *und* **f** *sind (bis auf Vertauschen) durch die Ellipse eindeutig*

bestimmt, und ebenso ist r durch die Ellipse eindeutig bestimmt. Die Punkte **f** *und*

f *fallen genau dann zusammen, wenn die Ellipse ein Kreis (mit Radius r) ist.*

Bemerkung 60 Satz 4.2 besagt, daß folgende Konstruktion eine Ellipse ergibt.

Man nehme einen Faden der Länge 2 *r*, befestige ein Ende im Punkt **f** und das andere

im Punkt **f** , halte einen Stift senkrecht an einen Punkt des Fadens und spanne den

Faden. Alle Punkte, die mit dem Stift bei gespanntem Faden erreicht werden können,

sind Punkte der Ellipse, und jeder Punkt der Ellipse kann so erhalten werden (siehe

Bild 4.7).

x

f’

f

Bild 4.7 Fadenkonstruktion einer Ellipse

Die beiden Punkte **f** und **f** , die durch die Ellipse eindeutig bestimmt sind, heißen

die Brennpunkte der Ellipse.

Die Fadenkonstruktion der Ellipse war bereits im Altertum bekannt. Im 16. und

17. Jahrhundert wurde eine Reihe von anderen Methoden entwickelt, um Ellipsen

(und verwandte Kurven) zu zeichnen (siehe [Rose]). Für eine Fadenkonstruktion des

Ellipsoids siehe [Hilbert–Cohn Vossen] § 4.

Beweis von Satz 4.2

Seien zunächst **f** , **f** ∈ R2 und 2 r > **f** − **f** . Mit T be-

zeichnen wir die Translation um den Vektor − 1 / 2(**f** + **f**). Dann ist T (**f**) = −T (**f**).

Wir können nun noch eine Drehung R um **0** durchführen, so daß ($R \circ T$)(f) und

($R \circ T$)(f) auf der x 1-Achse liegen. Deshalb können wir ohne Beschränkung der

Allgemeinheit annehmen, daß

f = (c, 0) ,

f = (−c, 0) mit $c \geq 0$

.

.

.

.

.

Nach Voraussetzung ist $c < r$.

Für einen Punkt $\mathbf{x} \in$ R2 gilt

$\mathbf{x} - \mathbf{f} + \mathbf{x} - \mathbf{f}$

$= 2\, r \Longleftrightarrow$

$(x\, 1 - c)2 + x\, 2 +$

$(x$

$= 2\, r$

2

$1 + c)2 + x\, 2$

2

⎧

⎨ $(x\, 1 - c)2 + x\, 2 + (x$

$- 4\, r\, 2$

2

$1 + c)2 + x\, 2$

2

$\Longleftrightarrow \lfloor = -2(x_1 - c)_2 + x_2 \cdot (x$

$_2$

$_1 + c)_2 + x_2$

$_2$

$\Longleftrightarrow x_2 + x_2 + c_2 - 2r_2 = -(x_2 - c_2)_2 + x_4 + 2x_2(x_2 + c_2)_1$

$_2$

$_1$

$_2$

$_2$

$_1$

$(x_2 + x_2 + c_2 - 2r_2)_2 = x_4 + x_4 + 2x_2x_2 - 2c_2x_2 + 2c_2x_2 + c_4$

$\Longleftrightarrow$

$_1$

$_2$

$_1$

$_2$

$_1{}_2$

$_1$

$_2$

und

$x_2 + x_2 + c_2 \leq 2r_2$

1

2

Dies wiederum ist äquivalent zu

$x\,4 + x\,4 + c\,4 + 4\,r\,4 + 2\,x\,2\,x\,2 + 2(\,c\,2 - 2\,r\,2)(\,x\,2 + x\,2) - 4\,c\,2\,r\,2 = x\,4 + x\,4 + c\,4 + 2\,x\,2\,x\,2 - 2\,c\,2\,x\,2 + 2\,c\,2\,x\,1$

2

1 2

1

2

1

2

1 2

1

und

$x\,2 + x\,2 + c\,2 \leq 2\,r\,2$

1

2

das heißt zu

$(\,r\,2 - c\,2)\,x\,2 + r\,2\,x\,2 = r\,2(\,r\,2 - c\,2)$ und $x\,2 + x\,2 + c\,2 \leq 2\,r\,2$

1

2

1

2

oder

x 2

x 2

x 2

x 2

1 +

2

= 1

und

1

+

2

≤ 1

r 2

r 2 − c 2

2 r 2 − c 2

2 r 2 − c 2

Da $r \geq c$, impliziert die erste Bedingung die zweite. Wir sehen also:

Ist **f** = (c, 0), **f** = (−c, 0), so gilt für **x** = (x 1 ,x 2) ∈ R2

x 2

x − **f** + **x** − **f**

= 2 r ⇐⇒ x 21 +

2

= 1

(4.5)

r 2

r 2 − c 2

Dies zeigt den ersten Teil von Satz 4.2, denn die rechte Seite von (4.5) ist die Glei-

chung einer Ellipse. Außerdem sieht man, daß die Brennpunkte auf der Symmetrie-

achse von E liegen, die die längere der beiden Hauptachsen enthält.

Sei nun umgekehrt E eine Ellipse. Nach Satz 4.1 können wir annehmen, daß

x 2

x 2

E =

(x

1

2

1 ,x 2) ∈ R2

+

= 1

a 2

a 2

1

2

mit a 1 ≥ a 2 > 0. Setze r := a 1, c :=

a 2 − a 2, **f** := (c, 0), **f** := (−c, 0). Nach (4.5)

1

2

ist

E = **x** ∈ R2

x − **f** + **x** − **f**

= 2 r .

.

.

.

4.2 Brennpunkte und Brenngeraden

181

Seien nun **p**, **p** Punkte in R2 und r > 0, so daß auch gilt

E = **x** ∈ R2

x − **p** + **x** − **p** = 2 r .

Wie oben bemerkt, liegen **p** und **p** auf der Symmetrieachse von E, die zu der länge-

ren Hauptachse gehört. Also gibt es $c > 0$ so daß $\mathbf{p} = (-c, 0)$. Aus (4.5) folgt nun,

daß $r^2 = a^2$, $r^2 - c^2 = a^2$. Somit ist $r = r$, $\mathbf{p} = \pm\mathbf{f}$, $\mathbf{p} = \pm\mathbf{f}$. Damit ist Satz 4.2

1

2

bewiesen.

✷

Auf dieselbe Weise beweist man

Satz 4.3 *Seien* $\mathbf{f}$ *und* $\mathbf{f}$ *verschiedene Punkte von* $\mathbb{R}^2$ *und* $2r < \mathbf{f} - \mathbf{f}$. *Dann ist* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$

$\mathbf{x} - \mathbf{f} - \mathbf{x} - \mathbf{f}$

$= 2r$

eine Hyperbel. Jede Hyperbel kann so beschrieben werden. Die Punkte $\mathbf{f}$, $\mathbf{f}$ *sowie* r

sind durch die Hyperbel eindeutig bestimmt. $\mathbf{f}$ *und* $\mathbf{f}$ *heißen die* Brennpunkte *der*

Hyperbel. Ist $\mathbf{f} = (c, 0)$, $\mathbf{f} = (-c, 0)$, *so ist*

x^2

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$

$\mathbf{x} - \mathbf{f} - \mathbf{x} - \mathbf{f}$

$= 2r$

$=$

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$

$1 -$

x^2

$= 1$

r^2

$c^2 - r^2$

x

f’

f

Bild 4.8 Zur Konstruktion einer Hyperbel

Bemerkung 61 Der Gedanke, die Menge aller Punkte zu betrachten, für die die Differenz der Abstände zu zwei festen Punkten konstant ist, liegt dem LORAN–Navigationssystem zugrunde (siehe [Jennings], 3.7).

Eine ähnliche Beschreibung wie für Ellipsen und Hyperbeln gibt es auch für Parabeln.

Satz 4.4 *Sei g eine Gerade im* $\mathbb{R}^2$ *und* **f** *ein Punkt von* $\mathbb{R}^2$ *, der nicht auf g liegt.*

F¨

ur einen Punkt **x** ∈ R2 *sei*

$d(\mathbf{x}, g) := \inf \mathbf{x} - \mathbf{y}$

$\mathbf{y} \in g$

der Abstand von **x** *zu g. Dann ist die Menge der Punkte* **x** ∈ R2 *, für die der Abstand*

x − **f** *von* **x** *zu* **f** *gleich dem Abstand* $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *von* **x** *zu g ist, eine Parabel. Jede Parabel kann so beschrieben werden. Der Punkt* **f** *und die Gerade g sind durch die*

Parabel eindeutig bestimmt; sie heißen Brennpunkt *bzw.* Brenngerade *der Parabel.*

x

f

d(x,g)

g

Bild 4.9 Zur Konstruktion einer Parabel

Beweis Sei zunächst *g* eine Gerade in R2 und **f** ein Punkt, der nicht auf *g* liegt.

Nach Anwendung einer orientierungserhaltenden Isometrie können wir annehmen,

daß

$g = (x_1, x_2) \in R2 \; x_2 = 0$

und

$\mathbf{f} = (0, c)$

mit $c > 0$.

Für einen Punkt $\mathbf{x} \in$ R2 ist dann $d(\mathbf{x}, g) = |x\ 2\ |$. Also ist

1

c

$\mathbf{x} - \mathbf{f} = d(\mathbf{x}, g) \Longleftrightarrow x\ 2 +(x$

$\Longleftrightarrow 2\ cx$

$+ c\ 2 \Longleftrightarrow x$

$x\ 2 +$

1

$2 - c)2 = x\ 2$

2

$2 = x\ 2$

1

$2 = 2\ c\ 1\ 2$

Damit ist gezeigt, daß

1

c

$\mathbf{x} \in$ R2

$\mathbf{x} - \mathbf{f} = d(\mathbf{x}, g) = \mathbf{x} \in$ R2 $x\ 2 =$

$x\ 2 +$

.

(4.6)

2 c 1

2

eine Parabel P ist. Aus (4.6) sieht man auch, daß **f** auf der Symmetrieachse der zu

f und g gehörenden Parabel liegt, und daß g senkrecht auf dieser Achse steht.

Seien nun **f** ein Punkt von R2 und g eine Gerade, so daß

P = **x** ∈ R2

x − **f**

= d(**x** ,g) .

Nach dem, was wir oben gesagt haben, liegt **f** auf der Symmetrieachse {**x** ∈ R2 |

x 1 = 0 } von P , und g steht senkrecht auf dieser Achse. Der Punkt (0 , 1 / 2 c) liegt auf P . Dann ist der Abstand von **f** zu (0 , 1 / 2 c) gleich dem Abstand von (0 , 1 / 2 c) zu g . Also gibt es d > 0 so daß

1

1

1

f =

0 , c +

d

,

g =

x ∈ R2 *x*

c − 1 *d* .

2

2

2 = 2

2

.

.

.

4.2 Brennpunkte und Brenngeraden

183

Wie oben rechnet man nach, daß

1

cd

x ∈ R2

x − **f**

= *d*(**x** ,*g*) =

x ∈ R2 *x* 2 =

x 2 +

c + *d* 1

c + *d*

Es folgt, daß *c* = *d*, und somit, daß **f** = **f** , *g* = *g*.

✷

Erg¨

anzung zu Satz 4.4

Der Brennpunkt der Parabel

$\{\mathbf{x} \in \mathrm{R}2 \mid x\,2 = ax\,2\}$

1

ist der Punkt $(0\,,\,1/4\,a)$, und ihre Brenngerade ist $\{\mathbf{x} \in \mathrm{R}2 \mid x\,2 = -1/(4\,a)\}$

Beweis Dies folgt aus (4.6), wenn man die Translation $(x\,1\,,x\,2) \to (x\,1\,,x\,2 - c/2)$ anwendet.

✷

In den Sätzen 4.2, 4.3 und 4.4 haben wir Brennpunkte von Ellipsen, Hyperbeln

und Parabeln definiert, ohne zu erklären, weshalb wir das Wort Brennpunkt“ ver-

”

wendet haben. Das wollen wir jetzt nachholen. Beginnen wir mit Parabeln. Bevor

wir die Aussage exakt formulieren, wollen wir sie in der Sprache der Strahlenoptik

umschreiben. Betrachten wir die Parabel

$Pa = (x\,1\,,x\,2) \in \mathrm{R}2\; x\,2 = ax\,2\,,\; a > 0$

1

und stellen uns vor, daß die Oberseite der Parabel verspiegelt ist. Wir verfolgen

einen Lichtstrahl, der von oben parallel zur $x\,2$-Achse einfällt. Der Satz, den wir

unten formulieren werden, besagt, daß der Lichtstrahl nach der ersten Spiegelung

durch den Brennpunkt geht.

x2

x

2

2 = a x1

Lichtstrahl

x1

Bild 4.10

Fällt also das Licht parallel zur *x* 2-Achse auf die Parabel ein, so gehen alle gespie-

gelten Strahlen durch den Brennpunkt. Um den Brennpunkt liegt also ein Bereich

besonders hoher Lichtintensität. Deshalb kann man eine Parabel (oder besser, einen

rotationssymmetrischen Parabolspiegel) als Brennglas verwenden.

Um den Satz, daß ein senkrecht von oben einfallender Lichtstrahl von der Parabel

so gespiegelt wird, daß er nach der Spiegelung durch den Brennpunkt geht, präzise zu

fassen, müssen wir zunächst das Spiegelungsgesetz Einfallswinkel = Ausfallswinkel“

”

formulieren. Einfallswinkel und Ausfallswinkel werden gegenüber der Tangentialge-

raden an die Parabel gemessen. Deshalb definieren wir zunächst Tangentialgeraden

(vgl. auch Abschnitt 3.4).

x2

x1

Bild 4.11 Tangentialgeraden

Definition 62 *Sei C ein nichtentarteter Kegelschnitt und* $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ *ein Punkt*

von C. Ferner sei $\varepsilon > 0$ *und*

$\mathbf{w} : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^2$

$t \to w_1(t), w_2(t) = \mathbf{w}(t)$

eine Abbildung, so daß

- $\mathbf{w}(t) \in C$ *für alle* $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$
- *die Funktionen* $t \to w_1(t)$ *und* $t \to w_2(t)$ *differenzierbar sind*
- $\mathbf{w}(0) = \mathbf{p}$
- $\dot{\mathbf{w}}(0) := \dot{w}_1(0), \dot{w}_2(0) = (0, 0)$ *(hier steht der* $\dot{}$ *für d/dt).*

Dann heißt $\dot{}$

$\mathbf{w}(0)$ Tangentialvektor *an C in* $\mathbf{p}$.

Die Parametrisierungen aus Bemerkung 59.ii) ergeben Abbildungen **w** wie oben.

Man sieht also, daß die Definition sinnvoll ist. Ist *Pa* die Parabel

Pa =

(*x* 1 ,*x* 2) ∈ R2 *x* 2 = *ax* 21

und **p** = (*p* 1 ,*p* 2) ∈ *Pa*, so ist

w : R → R2

t → *t* + *p* 1 ,*a*(*t* + *p* 1)2

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

4.2 Brennpunkte und Brenngeraden

185

eine Parametrisierung wie in Definition 62. Also ist

(1 , 2 *ap* 1) ein Tangentialvektor an *Pa* im Punkt (*p* 1 ,*p* 2).

(4.7)

..

Ubung: Zeigen Sie:

i) Ist *Ea*

= {**x** ∈ R2 | *x* 2 /*a* 2 + *x* 2 /*a* 2 = 1 } und **p** = (*p*

1 ,a 2

1

1

2

2

1 ,p 2) ein Punkt von

Ea

, so ist ($-p$

,p

) ein Tangentialvektor an E

im Punkt **p**!

1 ,a 2

2 /a 2

2

1 /a 2

1

a 1 ,a 2

ii) Ist Ha

= {**x** ∈ R2 | x 2 /a 2 − x 2 /a 2 = 1 } und **p** = (p

1 ,a 2

1

1

2

2

1 ,p 2) ein Punkt von

Ha

, so ist (p

,p

) ein Tangentialvektor an H

im Punkt **p**!

1 ,a 2

2 /a 2

2

1 /a 2

1

a 1 ,a 2

Lemma 63 *Sei C eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, und* **p** = (p 1 ,p 2) ∈ *C. Sind*

v(1) *und* **v**(2) *Tangentialvektoren an C in* **p** *, so gibt es eine reelle Zahl* $\lambda = 0$ *, so daß* **v**(2) = $\lambda \cdot$ **v**(1) .

Beweis Wir betrachten den Fall einer Ellipse; die Fälle einer Parabel oder Hyperbel

können ähnlich behandelt werden. Nach Satz 4.1 können wir annehmen, daß

x 2

x 2

C = (x

1

2

1 ,x 2) ∈ R2

+

= 1 .

a 2

a 2

1

2

Wir behaupten, daß für jeden Tangentialvektor **v** = (v 1 ,v 2)

p 1 v 1

p

+ 2 v 2 = 0 .

(4.8)

a 2

a 2

1

2

In der Tat, ist **w** : ($-\varepsilon,\varepsilon$) → R2 eine Abbildung wie in Definition 62, so folgt

w 1(t)2

w

+

2(t)2 = 1 .

a 2

a 2

1

2

Durch Differenzieren nach t ergibt sich

w 1(t) ˙

w 1(t)

w

+

2(t) ˙

w 2(t) = 0 .

a 2

a 2

1

2

Für t = 0 ist dann

p 1 ˙

w 1(0)

p

+ 2 ˙

w 2(0) = 0 ,

a 2

a 2

1

2

also (4.8). Da je zwei Lösungen von (4.8) sich nur um ein skalares Vielfaches unter-

scheiden, folgt Lemma 63.

✷

Lemma 63 zeigt, daß Tangentialvektoren an einen nichtentarteten Kegelschnitt

in einem Punkt bis auf Multiplikation mit einem Skalar eindeutig bestimmt sind.

Deshalb macht die folgende Definition Sinn:

.

.

.

.

.

Definition 64 *Sei C eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel,* **p** *ein Punkt von C und*

v

ein Tangentialvektor an C in **p** . *Die Menge* $\{\lambda \cdot \mathbf{v} \mid \lambda \in \mathrm{R}\}$ *heißt der* Tangentialraum *an C in* **p** , *die Gerade* $\{\mathbf{p} + \lambda \cdot \mathbf{v} \mid \lambda \in \mathrm{R}\}$ *die* Tangentialgerade *an C in* **p** .

..

Ubung: Zeigen Sie: Ist C eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, $\mathbf{p} \in C$ und g die

Tangentialgerade an C, und ist ϕ eine orientierungserhaltende Kongruenz, so ist

$\phi(g)$ die Tangentialgerade an $\phi(C)$ in $\phi(\mathbf{p})$!

Ist nun **p** ein Punkt der Parabel Pa =

$(x_1, x_2) \in \mathrm{R}2$

$x_2 = ax_2$ und **v** ein

1

Tangentialvektor an Pa in **p**, so bildet der senkrecht von oben einfallende Strahl, der

Pa in **p** trifft, mit der Parabel den Winkel

0

1

arccos

.

v

1

v

x2

(0)

1

v

||v||

P

x1

Bild 4.12 Winkel zwischen senkrecht einfallendem Strahl und Tangentialgerade

Ebenso ist der Winkel, den der vom Brennpunkt **f** ausgehende Strahl mit der

Parabel bildet, gleich

1

arccos

(**p** − **f**) · 1 **v** .

p − **f**

v

Die Aussage, daß diese beiden Strahlen mit der Parabel den gleichen Winkel bilden,

ist also

Satz 4.5 *Sei Pa die Parabel*

Pa = (*x* 1 ,*x* 2) ∈ R2 *x* 2 = *ax* 2

,

$a > 0$,

1

und **f** = (0 , 1 / 4 *a*) *ihr Brennpunkt (vergl. mit der Erg*¨

anzung zu Satz 4.4). Ferner sei

p = (*p* 1 ,*p* 2) *ein Punkt von Pa und* **v** *ein Tangentialvektor an Pa in* **p** . *Dann ist*
1

0

(**p** − **f**) · **v** =

· **v**

p − **f**

1

Beweis Wenn man **v** in der obigen Formel durch ein Vielfaches $\lambda \cdot$ **v** ersetzt, so

multiplizieren sich linke und rechte Seite mit λ. Wegen Lemma 63 genügt es deshalb,

Satz 4.5 für einen Tangentialvektor zu beweisen. Wir können also nach (4.7)

4.2 Brennpunkte und Brenngeraden

187

v = (1 , 2 *ap* 1)

nehmen. Die rechte Seite der behaupteten Formel ist dann gleich 2 *ap* 1, und die linke

Seite ist

1

p 1

.

1

2 *ap*

1

=

1

ap 2 +

1

2

p

2 *ap*

2

4 *a*

p 2 + *p*

$2 - 1$

$4a$

1

$a\ 2\ p\ 4 +$

1

$+ 1\ p\ 2$

1

$2 - 1$

$4a$

1

$4a$

$2\ 1$

$2\ ap$

1

$=$

1

$ap\ 2 +$

$= 2\ ap$

1

1

2

4 *a*

ap 2 + 1

1

4 *a*

Damit ist Satz 4.5 bewiesen.

✷

Man hätte auch die Beschreibung der Parabel mittels Brennpunkt und Brennge-

rade aus Satz 4.4 verwenden können, um Satz 4.5 zu beweisen. Einen Beweis dieses

Typs geben wir für den nächsten Satz, der von den Brennpunkten einer Ellipse

handelt.

Satz 4.6 *Sei E eine Ellipse mit den Brennpunkten* **f** *und* **f** . *Ferner sei* **p** *ein Punkt von E, und* **v** *ein Tangentialvektor an E in* **p** . *Dann gilt*

1

(**p** − **f**) · **v** = −

1

(**p** − **f**) · **v**

p − **f**

p − **f**

P

v

f’

f

Bild 4.13

In Worten: Der Betrag des Winkels zwischen dem Strahl von **p** *aus in Richtung von*

v und dem Strahl von **p** *nach* **f** *ist gleich dem Betrag des Winkels zwischen dem*

Strahl von **p** *aus in Richtung* −**v** *und dem Strahl von* **p** *nach* **f** . *Ferner liegt der Punkt* **f** *auf derselben Seite der Tangentialgeraden an E in* **p** *wie der Punkt* **f** .

Beweis

Sei

$\mathbf{w} : (-\varepsilon,\varepsilon) \to E,$

$t \to w_1(t), w_2(t)$

.

.

.

.

.

.

.

eine Abbildung wie in Definition 62, das heißt $\mathbf{w}(0) = \mathbf{p}$, w_1 und w_2 seien differen-

zierbar und

.

$\mathbf{w}(0) =$

.

$w\,1(0)\,,\ \dot{}$

$w\,2(0) = \mathbf{v}$

Nach Satz 4.3 gibt es $r > 0$, so daß

$E = \mathbf{x} \in \mathrm{R}2$

$\mathbf{x} - \mathbf{f} + \mathbf{x} - \mathbf{f}$

$= 2\,r$

Insbesondere ist also für alle $t \in (\,-\varepsilon,\varepsilon)$

$\mathbf{w}(\,t) - \mathbf{f} + \mathbf{w}(\,t) - \mathbf{f}$

$= 2\,r$

das heißt

$\mathbf{w}(\,t) - \mathbf{f} \cdot \mathbf{w}(\,t) - \mathbf{f} +$

$\mathbf{w}(\,t) - \mathbf{f}$

$\cdot\,\mathbf{w}(\,t) - \mathbf{f} = 2\,r$

Differenziert man diese Gleichung nach t, so erhält man

$2\,\mathbf{w}(\,t) - \mathbf{f} \cdot\ \dot{}$

$\mathbf{w}(\,t)$

$2\,\mathbf{w}(\,t) - \mathbf{f}$

$\cdot\ \dot{}\mathbf{w}(\,t)$

$+$

$= 0$

$2\,\mathbf{w}(\,t) - \mathbf{f}$

2 **w**(t) − **f**

Da **w**(0) = **p**, ˙

w(0) = **v**, ergibt sich für t = 0 die erste Behauptung von Satz 4.6.

Lägen **f** und **f** auf verschiedenen Seiten der Tangentialgeraden, so läge nach dem

eben Bewiesenen **p** auf der Verbindungsgeraden von **f** und **f** .

✷

Bemerkung 65 In der Sprache der Strahlenoptik läßt sich Satz 4.6 folgendermaßen

interpretieren: Stellen Sie sich vor, daß die Innenseite der Ellipse verspiegelt ist. Dann

wird jeder von **f** ausgehende Lichtstrahl so reflektiert, daß er durch **f** geht.

Eine andere Interpretation von Satz 4.6 ist folgende: Stellen Sie sich vor, Sie

hätten einen Billiardtisch, der durch eine Ellipse begrenzt wird. Billiardbälle werden

ebenfalls nach dem Prinzip Einfallswinkel = Ausfallswinkel“ an der Bande reflek-

”

tiert. Satz 4.6 besagt also, daß ein Billiardball, der im Punkt **f** angestoßen wird,

nach einer Reflektion durch **f** geht, nach zwei Reflektionen wieder durch **f** , usw. In

den Abschnitten 4.4 und 4.7.3 betrachten wir das sogenannte elliptische Billiard“

”

genauer.

Ein Analogon von Satz 4.6 gilt auch für Hyperbeln

Satz 4.7 *Sei H eine Hyperbel mit den Brennpunkten* **f** *und* **f** *,* **p** *ein Punkt von H*

und **v** *ein Tangentialvektor an H in* **p** *. Dann gilt*

1

1

(**p** − **f**) · **v** =

(**p** − **f**) · **v**

p − **f**

p − **f**

In Worten: Der Betrag des Winkels zwischen dem Strahl von **p** *aus in Richtung von*

v *und dem Strahl von* **p** *nach* **f** *ist gleich dem Betrag des Winkels zwischen dem*

Strahl von **p** *aus in Richtung* −**v** *und dem Strahl von* **p** *nach* **f** *. Ferner liegen* **f** *und* **f** *auf verschiedenen Seiten der Tangentialgeraden an H in* **p** *.*

.

4.3 Schnitt eines Kegelschnitts mit Geraden oder anderen Kegelschnitten

189

Den Beweis dieses Satzes, der keine ganz so schöne Interpretation hat wie Satz

4.6, überlassen wir den LeserInnen als Übung.

..

Ubung: (Fußpunktkonstruktion der Ellipse) Sei **p** = (*p* 1 ,*p* 2) ein Punkt innerhalb des

Kreises *K* = *{*(*x* 1 ,*x* 2) ∈ R2 |*x* 2 + *x* 2 = 1 *}*, d.h. *p* 2 + *p* 2 < 1. F

1

2

1

2

ür jedes $\mathbf{x} \in K$ bezeichne

$t\mathbf{x}$ die Gerade senkrecht zu $\mathbf{px}$ durch $\mathbf{x}$. Finden Sie eine Ellipse mit Brennpunkten

$\mathbf{p}$ und $-\mathbf{p}$, an die jede der Geraden $t\mathbf{x}$ tangential ist!

¨

Ubung: (Leitlinienkonstruktion f¨

ur Ellipse und Hyperbel) Gegeben seien eine Gerade

, ein Punkt $\mathbf{f}$, der nicht auf

liegt, und eine Zahl $e > 0$. Betrachten Sie die Menge

$C := \{\mathbf{x} \in \mathrm{R}2 \mid \mathbf{x} - \mathbf{f} = e \cdot d(\mathbf{x}\ ,\ )\ \}$

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

i)

Die Menge C ist eine Ellipse, Parabel bzw Hyperbel mit $\mathbf{f}$ als Brennpunkt –

je nachdem ob $e < 1$, $e = 1$ oder $e > 1$ ist!

ii)

Jeder nichtentartete Kegelschnitt kann mit der obigen Konstruktion erhalten

werden, und

und e sind durch C und $\mathbf{f}$ eindeutig bestimmt! Die Gerade

heißt

Brenngerade und *e* die *Exzentrizit*¨

at von *C*.

iii) Gegeben sei ferner eine Gerade *g*, die *C* in zwei Punkten **p** und **p** schneidet.

Schneidet *g* die *Leitlinie*

in einem Punkt **q**, so gilt

pfq = 180 ◦ − **p fq**

Ist *g* parallel zu , so haben **p f** und **pf** mit der Parallelen zu *l* durch **f** gleiche

Winkel!

iv) Sei **p** ∈ *C* und *t* die Tangentialgerade an *C* in **p**. Schneidet *t* die Leitlinie in einem Punkt **q**, so steht die Gerade durch **f** und **q** senkrecht auf der Verbindungsgeraden von **f** und **p**. Ist *t* parallel zu , so ist die Gerade durch **f** und **p** senkrecht

zu *t*!

4.3

Schnitt eines Kegelschnitts mit Geraden oder

anderen Kegelschnitten

Die wichtigste Ausssage über Schnitte von Kegelschnitten und Geraden ist

Proposition 66 *Sei* $C \subset \mathrm{R}2$ *ein Kegelschnitt und* $g \subset \mathrm{R}2$ *eine Gerade. Ist g nicht*

ganz in C enthalten, so besteht $g \cap C$ *aus höchstens zwei Punkten.*

Beweis Sei

$C = (x\,1, x\,2) \in \mathrm{R}2\ f(x\,1, x\,2) = 0,$

wobei

$f(x_1, x_2) = a_{11} x_2 + 2 a$

$+ b$

1

$12 x_1 x_2 + a_{22} x_2$

2

$1 x_1 + b_2 x_2 + c$

ein quadratische Funktion ist. Ferner sei

.

$g = \{\mathbf{y} + t \cdot \mathbf{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$

mit $\mathbf{y}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Dann hat das Polynom

$p(t) := f(\mathbf{y} + t\mathbf{v}) = f(y_1 + tv_1, y_2 + tv_2)$ Grad ≤ 2 in t. Eine Zahl t ist genau dann eine Nullstelle von p, wenn der Punkt

$\mathbf{y} + t\mathbf{v}$ auf $C \cap g$ liegt. So können alle Punkte von $C \cap g$ erhalten werden. Ist $p(t)$ identisch Null, so ist $g \subset C$. Ist $p(t)$ nicht identisch Null, so hat es als Polynom vom

Grad ≤ 2 höchstens zwei Nullstellen.

✷

Da Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln keine Geraden enthalten, folgt

Korollar 67 *Eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel trifft eine Gerade in h¨*

ochstens

zwei Punkten.

Von besonderem Interesse sind die Tangentialgeraden an einen Kegelschnitt.

Lemma 68 *Gegeben sei eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel*

$C = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \; f(x_1, x_2) = 0$

wobei $f(x_1, x_2)$ *eine quadratische Funktion ist. Ferner sei*

$g = \{\mathbf{y} + t \cdot \mathbf{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$ $(\mathbf{y}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2, \mathbf{v} = \mathbf{0})$ *eine Gerade in* $\mathbb{R}^2$ *, und* $\mathbf{q}$ *ein Punkt von* $C \cap g$*. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

i) g *ist die Tangentialgerade an* C *in* $\mathbf{q}$.

ii) Ist $t_0 \in \mathbb{R}$ *so daß* $\mathbf{q} = \mathbf{y} + t_0\mathbf{v}$ *, so nimmt das Polynom*

$p(t) := f(\mathbf{y} + t\mathbf{v}) = f(y_1 + tv_1, y_2 + tv_2)$ *an der Stelle* t_0 *den Wert 0 an, und hat dort ein Maximum oder Minimum. In*

anderen Worten, t_0 *ist eine doppelte Nullstelle von* p*. In diesem Fall trifft die*

Gerade g *den Kegelschnitt* C *nur im Punkt* $\mathbf{q}$.

Beweis Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß $\mathbf{q} = (0, 0)$.

Dann ist f von der Gestalt

$f(x_1, x_2) = a_{11} x_2 + 2 a$

$+ b$

1

$12 x_1 x_2 + a_{22} x_2$

2

$1 x_1 + b_2 x_2$.

Ferner ist (b 1 ,b 2) = (0 , 0), denn sonst wäre nach Korollar 57 der Kegelschnitt C eine

Doppelgerade, ein Geradenpaar oder ein Einsiedlerpunkt.

.

.

4.3 Schnitt eines Kegelschnitts mit Geraden oder anderen Kegelschnitten

Sei nun

$\mathbf{w} : (-\varepsilon,\varepsilon) \to C,$

$t \to \mathbf{w}(t) = w\ 1(t) ,w\ 2(t)$

eine Parametrisierung von C wie in Definition 62, das heißt

$\mathbf{w}(0) = (0 , 0)$

.

$\mathbf{w}(0) =$

.

$w\ 1(0) ,$ ˙

$w\ 2(0) = \mathbf{0}$.

Nach Definition ist

~

$g := \{\tau \cdot$ ˙

$\mathbf{w}(0) \mid \tau \in \mathrm{R} \}$

die Tangentialgerade an C in $\mathbf{q} = (0 , 0)$. Da $f\ \mathbf{w}(t) = 0$ für alle $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$, ist d f $\mathbf{w}(t)$

= 0 .

dt

t=0

Einsetzen ergibt

b 1 ˙

w 1(0) + b 2 ˙

w 2(0) = 0

(4.9)

Sei nun g = {t**v** | t ∈ R } mit **v** = **0** eine beliebige Gerade durch **q** = (0 , 0). Dann ist f (t · **v**) = (b 1 v 1 + b 2 v 2) · t + (a 11 v 2 + 2 a

) t 2

1

12 v 1 v 2 + a 22 v 2

2

Die Funktion t → f (t · **v**) hat also genau dann eine doppelte Nullstelle in 0, wenn

b 1 v 1 + b 2 v 2 = 0. Da (b 1 ,b 2) = (0 , 0), ist dies nach (4.9) genau dann der Fall, wenn **v** = λ · ˙

w(0)

für ein λ ∈ R , λ = 0 ,

das heißt, wenn g = ˜

g. Damit ist Lemma 68 für den Fall **y** = **q** bewiesen. Der

allgemeine Fall ergibt sich daraus sofort, denn die Funktionen $t \to f(\mathbf{y} + t \cdot \mathbf{v})$ und

$t \to f(\mathbf{q} + t \cdot \mathbf{v})$ unterscheiden sich nur durch Verschieben der Variablen t um den

Wert t 0.

Die Funktion $p(t)$ hat—mit Multiplizität gezählt—höchstens zwei Nullstellen. Ist

also t 0 eine doppelte Nullstelle, so hat p keine weitere Nullstelle. Deshalb gibt es

keinen weiteren Punkt von $C \cap g$.

✷

Bemerkung 69 Sei $g = \{\mathbf{y} + t \cdot \mathbf{v} \mid t \in \mathrm{R}\}$ eine Gerade,

$C = (x\,1, x\,2) \in \mathrm{R}2\ f(x\,1, x\,2) = 0$

ein nichtentarteter Kegelschnitt, und

$p(t) = f(\mathbf{y} + t \cdot \mathbf{v})$

.

wie in Lemma 68. Schreibe

$p(t) = at\,2 + 2\,bt + c.$

Ist $a = 0$, so ist nach Lemma 68 die Gerade g genau dann eine Tangente an C, wenn

die Diskriminante Δ des quadratischen Polynoms $p(t)$

$\Delta = ac - b\,2$

gleich Null ist. Wenn C eine Ellipse ist, ist a stets von 0 verschieden. Wenn C eine Hyperbel ist, so ist a genau dann gleich Null, wenn g parallel zu einer der Asymptotenlinien von C ist. In diesem Fall ist $\Delta = -b\ 2 = 0$ genau dann, wenn g gleich einer der Asymptotenlinien ist. Ist schließlich C eine Parabel, so ist $a = 0$ genau dann, wenn g parallel zur Symmetrieachse von C ist. In diesem Fall ist stets

$\Delta = 0$.

Korollar 70 *Sei*

$C = (x\ 1\ ,x\ 2) \in$ R2 a 11 x 2 + 2 a

+ b

1

12 x 1 x 2 + a 22 x 2

2

1 x 1 + b 2 x 2 + c = 0

eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, und **q** $\in$ *C. Dann ist die Tangentialgerade an*

C in **q** *gleich*

$g = (x\ 1\ ,x\ 2) \in$ R2 (2 a 11 q 1+2 a 12 q 2+ b 1) x 1+(2 a 12 q 1+2 a 22 q 2+ b 2) x 2+ b 1 q 1+ b 2 q 1+2 c = 0

Beweis Es ist leicht nachzurechnen, daß **q** $\in g$ und daß

$g = \{\mathbf{q} + t \cdot \mathbf{v} \mid t \in \mathrm{R}\ \}$

mit

$\mathbf{v} := 2a_{12}q_1 + 2a_{22}q_2 + b_2, -(2a_{11}q_1 + 2a_{12}q_2 + b_1)$ Nach Lemma 68 genügt es also nachzuprüfen, daß die Funktion

$$p : t \to a_{11}(q_1 + tv_1)^2 + 2a_{12}(q_1 + tv_1)(q_2 + tv_2) + a_{22}(q_2 + tv_2)^2$$

$$+ b_1(q_1 + tv_1) + b_2(q_2 + tv_2) + 2c$$

in 0 eine doppelte Nullstelle hat. Da $\mathbf{q} \in C$, ist $p(0) = 0$. Die Ableitung an der Stelle

0 ist

.

$$p(0) = 2a_{11}q_1v_1 + 2a_{12}q_2v_1 + 2a_{12}q_1v_2 + 2a_{22}q_2v_2 + b_1v_1 + b_2v_2$$

$$= (2a_{11}q_1 + 2a_{12}q_2 + b_1)v_1 + (2a_{12}q_1 + 2a_{22}q_2 + b_2)v_2$$

$$= 0$$

✷

.

.

.

.

.

4.3 Schnitt eines Kegelschnitts mit Geraden oder anderen Kegelschnitten

Bemerkung 71 Korollar 70 ist ein Spezialfall eines allgemeineren Satzes aus der

Analysis (vgl. z.B. [Courant], Band 2, III.2): Ist $f(x_1, x_2)$ eine differenzierbare Funk-

tion in zwei Veränderlichen, $C :=$

$(x_1, x_2) \in \mathbb{R}$

$f(x_1, x_2) = 0$ und $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$

ein Punkt von C, so daß wenigstens eine der partiellen Ableitungen $\partial f/\partial x_1(\mathbf{q})$,

$\partial f/\partial x_2(\mathbf{q})$ von f in $\mathbf{q}$ nicht verschwindet, so ist die Tangentialgerade an C in $\mathbf{q}$

gleich

∂f

∂f

$(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$(\mathbf{q}) \cdot x$

$(\mathbf{q}) \cdot x$

$(\mathbf{q}) \cdot q$

$(\mathbf{q}) \cdot q$

∂x

$1 +$

$2 - \partial f$

$1 - \partial f$

$2 = 0$

1

∂x_2

∂x_1

∂x_2

Eine weitere Folgerung aus Lemma 68 ist

Proposition 72 *Sei C eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel und* **y** *ein Punkt von* R2 .

Dann gibt es h¨

ochstens zwei Geraden durch **y** *, die an C tangential sind (vgl. Bild*

4.14).

C

y

Bild 4.14

Falls **y** ∈ *C, so gibt es genau eine Gerade g durch* **y** *, die an C tangential ist,*

n¨

amlich die Tangentialgerade an C in **y** .

Beweis Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß **y** =

(0 , 0). Sei

$f(x_1, x_2) = a_{11} x_2 + 2 a$

$+ b$

1

$12 x_1 x_2 + a_{22} x_2$

2

$1 x_1 + b_2 x_2 + c = 0$

die Gleichung von *C*. Jede Gerade durch **y** ist von der Form $\{t\mathbf{v} \mid t \in \mathrm{R}\}$ mit

$\mathbf{v} \in \mathrm{R}2 \setminus \{\mathbf{0}\}$. Zwei Richtungsvektoren **v**, **v** ergeben genau dann die gleiche Gerade, wenn $\mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v}$ mit $\lambda = 0$. Ist $\{t\mathbf{v} \mid t \in \mathrm{R}\}$ eine Tangentialgerade an *C*, so

verschwindet nach Bemerkung 69 die Diskriminante $\Delta(\mathbf{v})$ des Polynoms

$p\mathbf{v}(t) = (a_{11} v_2 + 2 a_{12} v_1 v_2 + a_{22} v_2^2 + b_1 v_1 + b_2 v_2) t + c$

Sei

$\Delta(\mathbf{v}) := 4 c(a_{11} v_2 + 2 a_{12} v_1 v_2 + a_{22} v_2^2) - (b_1 v_1 + b_2 v_2)^2$

Die Abbildung $\mathbf{v} \to \Delta(\mathbf{v})$ ist eine quadratische Form in den Variablen v_1, v_2.

..

Ubung: Zeigen Sie, daß die Funktion $\mathbf{v} \to \Delta(\mathbf{v})$ nicht identisch Null ist!

.
.
.
.
.
.
.
.
.

Nach Bemerkung 59.i) ist

$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$

$\Delta(\mathbf{v}) = 0$ } entweder nur der Punkt (0 , 0)

oder eine Gerade durch (0 , 0) oder die Vereinigung zweier Geraden durch (0 , 0). Ent-

sprechend gibt es keine, oder eine oder zwei Geraden durch **y**, die an *C* tangential

sind.

Falls $\mathbf{y} = (0 , 0)$ auf *C* liegt, so ist $c = 0$ und somit $\Delta(\mathbf{v}) = (b_1 v_1 + b_2 v_2)^2$. In diesem Fall ist also

$(v_1 , v_2) \in \mathbb{R}^2$ $\Delta(\mathbf{v}) = 0$ die Gerade $(v_1 , v_2) \in \mathbb{R}^2$ $b_1 v_1 + b_2 v_2 = 0$, und es gibt genau eine Gerade *g* durch **y**, die an *C* tangential ist. Die Tangentialgerade an *C* durch **y** hat diese Eigenschaft, also ist *g* diese Tangentialgerade.

✷

..

Ubung: Sei *C* eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, *p* ein Punkt von *C* und *g* die

Tangentialgerade an *C* in *p*. Zeigen Sie, daß es höchstens einen Punkt **q** auf *C* gibt,

so daß die Tangentialgerade an *C* in **q** die Gerade *g* nicht schneidet (siehe Bild 4.15)!

g

q

p

Bild 4.15

Proposition 66 und Proposition 72 können wir verwenden, um die relative Lage

von Geraden und Kegelschnitten zu diskutieren. Wir tun dies am Beispiel der Ellipse

x 2

x 2

$E := E$

1

2

a

=

(x

+

= 1

1 ,a 2

1 ,x 2) ∈ R2

a 2

a 2

1

2

Sei **y** ∈ R2 und *g* = *{***y** + *t* · **v** | *t* ∈ R *}* eine Gerade durch **y**. Für die Lage von **y** gibt es drei Möglichkeiten

y 2

y 2

y liegt im Innern“ der Ellipse, das heißt

1 + 2 < 1

(4.10)

”

a 2

a 2

1

2

y 2

y 2

y liegt auf der Ellipse, das heißt

1 + 2 = 1

(4.11)

a 2

a 2

1

2

y 2

y 2

y liegt außerhalb“ der Ellipse, das heißt

1 + 2 > 1

(4.12)

”

a 2

a 2

1

2

Setze

x 2

x 2

f (x

1

2

1 ,x 2) :=

+

− 1

a 2

a 2

1

2

.

Das quadratische Polynom

$p(t) := f(\mathbf{y} + t\mathbf{v}) = f(y_1 + tv_1, y_2 + tv_2)$ strebt für $t \to \pm\infty$ gegen $+\infty$. Im Fall (4.10) ist $p(0) < 0$, also hat p nach dem

Zwischenwertsatz mindestens eine Nullstelle im Intervall $(-\infty, 0)$ und eine Nullstelle

im Intervall $(0, \infty)$. Die Nullstellen von $p(t)$ entsprechen gerade den Punkten von

$g \cap E$. Folglich besteht $g \cap E$ aus mindestens zwei, und somit nach Proposition 66

aus genau zwei Punkten.

v

y

Bild 4.16

Im Fall (4.11) kann g die Tangentialgerade an E in $\mathbf{y}$ sein. Alle anderen Gera-

den durch $\mathbf{y}$ schneiden E in genau zwei Punkten, denn dann hat p zwei einfache

Nullstellen (Bild 4.17).

y

E

Bild 4.17

Im Fall (4.12) gibt es stets zwei verschiedene Tangentialgeraden an E durch den

Punkt $\mathbf{y}$. Ferner gibt es unendlich viele Geraden durch $\mathbf{y}$, die E überhaupt nicht

treffen, und unendlich viele Geraden durch $\mathbf{y}$, die E in genau zwei Punkten treffen

(Bild 4.18).

..

Ubung: Beweisen Sie die oben formulierten Aussagen über den Fall (4.12)!

Wir betrachten nun noch den Schnitt von zwei Kegelschnitten.

.

y

E

Bild 4.18

Satz 4.8 *Seien* C 1 *und* C 2 *Kegelschnitte. Falls* C 1 = C 2 *und es keine Gerade gibt,*

die sowohl in C 1 *als auch in* C 2 *enthalten ist, so besteht* C 1 ∩ C 2 *aus höchstens vier*

Punkten (siehe Bild 4.19).

Bild 4.19

Beweis Für j = 1, 2 sei $fj(\mathbf{x}) = 0$ eine quadratische Gleichung für Cj, das heißt

$Cj = \mathbf{x} \in$ R2 | $fj(\mathbf{x}) = 0$

Wir nehmen an, daß $C\,1 \cap C\,2$ mindestens fünf verschiedene Punkte $\mathbf{p}(1)\,, \ldots,$ $\mathbf{p}(5)$

enthält. Liegen von diesen fünf Punkten drei auf einer Geraden g, so besteht $g \cap Cj$

aus mindestens diesen drei Punkten ($j = 1\,, 2$). Nach Proposition 66 ist dann $g \subset Cj$

für $j = 1, 2$, also enthält $C\,1 \cap C\,2$ diese Gerade g.

Wir nehmen von nun an an, daß keine drei der fünf Punkte auf einer Geraden

liegen. Sei g die Gerade durch $\mathbf{p}(1)$ und $\mathbf{p}(2)$. Dann sind $\mathbf{p}(3)$, $\mathbf{p}(4)$, $\mathbf{p}(5)$ /

$\in g$. Wir

wählen einen von $\mathbf{p}(1)$ und $\mathbf{p}(2)$ verschiedenen Punkt $\mathbf{q}$ der Geraden g . Dann gibt

es $(\lambda\,1\,,\lambda\,2) \in \mathrm{R}2 \setminus (0\,, 0)$ so, daß

$\lambda\,1\,f\,1(\mathbf{q}) + \lambda\,2\,f\,2(\mathbf{q}) = 0$.

Da $C\,1 = C\,2$, sind die Funktionen $f\,1$ und $f\,2$ keine Vielfachen voneinander. Also ist

die Funktion $\mathbf{x} \to \lambda\,1\,f\,1(\mathbf{q}) + \lambda\,2\,f\,2(\mathbf{q})$ nicht identisch Null. Somit ist

.

4.3 Schnitt eines Kegelschnitts mit Geraden oder anderen Kegelschnitten

197

$C := \{\mathbf{x} \in \mathrm{R}2 \mid \lambda\,1\,f\,1(\mathbf{x}) + \lambda\,2\,f\,2(\mathbf{x}) = 0\,\}$

ein Kegelschnitt oder eine Gerade. Offenbar liegen die Punkte $\mathbf{p}(1)\,, \ldots,$ $\mathbf{p}(5)$ und $\mathbf{q}$

auf C . Dies schließt aus, daß C eine Gerade ist. Andererseits enthält $g \cap C$ die

drei Punkte **q**, **p**(1), **p**(2), also ist nach Proposition 66

$g \subset C$

Nach der Klassifikation von Kegelschnitten in Satz 4.1 ist ein Kegelschnitt, der eine

Gerade enthält, die Vereinigung dieser Geraden mit einer weiteren Geraden (die mit

der ersten übereinstimmen kann). Also gibt es eine Gerade g , so daß

$C = g \cup g$

Nun liegen aber die Punkte **p**(3), **p**(4), **p**(5) nicht auf g . Also liegen sie auf g . Dies

ist ein Widerspruch zu der Annahme, daß keine drei der Punkte **p**(1) , . . . , **p**(5) auf

einer Geraden liegen.

✷

Aus Satz 4.8 folgt, daß eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel durch fünf ihrer Punkte

eindeutig bestimmt ist. Genauer gilt

Korollar 73 *Seien* **p**(1) , . . . , **p**(5) *f¨*

unf verschiedene Punkte von R2 *, von denen keine*

vier auf einer Geraden liegen. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Kegelschnitt,

der diese f¨

unf Punkte enth¨

alt.

Beweis Schreibe **p**(j) = p(j) ,p(j) . Das System der f

1

2

ünf linearen Gleichungen

2

2

a 11 p(j)

+ 2 a

p(j) + a

+ b

+ b

+ c = 0

1

12 p(j)

1

2

22

p(j)

2

1 p(j)

1

2 $p(j)$

2

($j = 1, \ldots, 5$) in den sechs Veränderlichen a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2 und c hat mindestens eine von (0 , 0 , 0 , 0 , 0 , 0) verschiedene Lösung. Der zugehörige Kegelschnitt

$C := (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \; a_{11} x_2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2 + b_2$

$1 x_1 + b_2 x_2 + c = 0$

enthält dann die Punkte $\mathbf{p}(1), \ldots, \mathbf{p}(5)$.

Um Eindeutigkeit zu zeigen, nehmen wir an, es gäbe zwei verschiedene Kegel-

schnitte C_1, C_2, die die fünf Punkte $\mathbf{p}(1), \ldots, \mathbf{p}(5)$ enthalten. Nach Satz 4.8 enthält

dann $C_1 \cap C_2$ eine Gerade g. Die Klassifikation von Kegelschnitten aus Satz 4.1 zeigt,

daß es dann Geraden g_1, g_2 gibt, so daß

$C_1 = g \cup g_1$ und $C_2 = g \cup g_2$.

Auf g liegen nach Voraussetzung höchstens drei der fünf Punkte $\mathbf{p}(1), \ldots, \mathbf{p}(5)$. Die

übrigen liegen dann sowohl auf g_1 als auch auf g_2. Folglich ist $g_1 = g_2$ und somit

$C_1 = C_2$.

✷

..

Ubung: Sei *C* eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, **p** ein Punkt von *C* und *g* die

Tangentialgerade an *C* in **p**. Zeigen Sie, daß es höchstens einen Punkt **q** auf *C* gibt,

so daß die Tangentialgerade an *C* in **q** die Gerade *g* nicht schneidet!

4.4

Konfokale Kegelschnitte

Wir betrachten in diesem Abschnitt das System von Kegelschnitten, die zwei vorge-

gebene Punkte als Brennpunkte haben.

Satz 4.9 *Seien* **f** *und* **f** *zwei verschiedene Punkte von* R2 . *Weiter sei* **p** *ein Punkt von* R2 *, der nicht auf der Geraden durch* **f** *und* **f** *und nicht auf der Mittelsenkrechten von* **f** *und* **f** *liegt (die Mittelsenkrechte von* **f** *und* **f** *ist definiert als die Menge* **x** ∈ R2 | **x** − **f** = **x** − **f**

). Dann gibt es genau eine Ellipse E und genau eine

Hyperbel H, die **f** *und* **f** *als Brennpunkte haben und durch* **p** *gehen. Ist* **v** *ein Tangentialvektor an E in* **p** *und* **w** *ein Tangentialvektor an H in* **p** *, so stehen* **v** *und* **w** *aufeinander senkrecht.*

Beweis Es seien *gE* bzw. *gH* die Tangentialgeraden an *E* bzw. *H* in **p**. Wähle

Hilfspunkte **q**, **q** auf *gE*, die auf derselben Seite von *gH* liegen wie **f** , **f** ! Ferner sei **m** der Schnittpunkt von *gH* mit der Geraden durch **f** und **f** .

P

gE

f’

f

gH

E

H

Bild 4.20

Nach Satz 4.6 und Satz 4.7 ist

q p f =

f p q

und

f p m =

m p f

Da

180 ◦ =

q p f +

f p m +

m p f +

f p q

= 2 (**q p f** +

f p m)

.

.

.

.

.

.

folgt

q p m =

q p f +

f p m = 90 ◦

✷

Definition 74 *Sind C* 1 *und C* 2 *Ellipsen oder Hyperbeln, so heißen C* 1 *und C* 2 kon-

fokal *, wenn sie die gleichen Brennpunkte haben.*

Satz 4.9 zeigt, daß das System der zu einer festen Ellipse oder Hyperbel konfoka-

len Kegelschnitte das Komplement der Symmetrieachsen der Ellipse oder Hyperbel

doppelt überdeckt“ und dort ein orthogonales System“ bildet (siehe Bild 4.21).

”

”

f’

f

Bild 4.21

Man verwendet dies, um ein neues Koordinatensystem, die sogenannten *ellipti-*

schen Koordinaten, einzuführen. Wir tun dies in dem Spezialfall, daß **f** und **f** auf

der Achse

(x 1 ,x 2) ∈ R2 x 2 = 0 symmetrisch zum Koordinatenursprung liegen.

Lemma 75 *Seien* a 1 > a 2 > 0 . *Die zu der Ellipse*

x 2

x 2

E

1

2

a

=

(x

+

= 1

1 ,a 2

1 ,x 2) ∈ R2

a 2

a 2

1

2

konfokalen Kegelschnitte sind

x 2

x 2

C

1

2

$\lambda :=$

$(x 1 ,x 2) \in$ R2

+

= 1

a 2 − λ

a 2 − λ

1

2

mit $-\infty < \lambda < a$ 2 *oder* a 2 $< \lambda < a$ 2 .

2

2

1

Beweis Setze

$r := a$ 1 $c :=$

r 2 − a 2 =

a 2 − a 2

2

1

2

Nach (4.5) sind dann

.

.

.

.

.

f := (c, 0)

und

f := ($-c$, 0)

die Brennpunkte von Ea

. Die zu E

konfokalen Ellipsen sind nach (4.5)

1 ,a 2

a 1 ,a 2

x 2

x 2

E

1

2

$r :=$

$(x 1 ,x 2) \in$ R2

+

$= 1$

$(r)2$

$(r)2 - c 2$

mit $|r| > c$. Setzt man $\lambda := a 2 - (r)2$, so durchl

1

äuft λ die Zahlen zwischen $-\infty$ und

$a 2 - c 2 = a 2$, und $(r)2 = a 2 - \lambda$, $(r)2 - c 2 = a 2 - \lambda$.

1

2

1

2

Dies beweist, daß die zu Ea

konfokalen Ellipsen gerade die Ellipsen C

$1 ,a 2$

λ mit

$-\infty < \lambda < a 2$ sind. Ebenso zeigt man, daß die zu E

konfokalen Hyperbeln

2

a_1, a_2

gerade die Hyperbeln C_λ mit $a_2 < \lambda < a_2$ sind.

✷

2

1

Nach Satz 4.9 gibt es für jeden Punkt $\mathbf{p} = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $p_1 = 0$ und $p_2 = 0$

genau eine Zahl $\lambda_1(\mathbf{p})$ zwischen $-\infty$ und a_2 und eine Zahl λ

$< \lambda$

2

$_2(\mathbf{p})$ mit a_2

2

$_2(\mathbf{p}) < a_2$

1

so daß

$\mathbf{p} \in C_{\lambda_1(\mathbf{p})}$ und $\mathbf{p} \in C_{\lambda_2(\mathbf{p})}$

..

Ubung: Beweisen Sie diese Aussage ohne Verwendung von Satz 4.9! Hinweis: Be-

trachten Sie die Funktion

p_2

$\lambda \to$

p 21

+

2

− 1 .

a 2 − λ

a 2 − λ

1

2

λ 1(**p**) und λ 2(**p**) heißen die *elliptischen Koordinaten* von **p** bzgl. der Ellipse *Ea*

.

1 ,a 2

Sie bilden Koordinaten auf jedem Quadranten von R2. Wir verifizieren dies für den

ersten Quadranten.

Proposition 76 *Sei*

Q := (x 1 ,x 2) ∈ R2 x 1 > 0 *und* x 2 > 0

der

erste Quadrant“. Dann ist die Abbildung

”

Q → (−∞,a 2) × (a 2 ,a 2)

2

1

2

$\mathbf{p} \to \lambda_1(\mathbf{p}), \lambda_2(\mathbf{p})$

eine Bijektion.

Beweis Zunächst zeigen wir, daß die Abbildung injektiv ist. Wären $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$

und $\mathbf{p} = (p, p)$ zwei verschiedene Punkte von Q mit λ

1

2

$_1(\mathbf{p}) = \lambda_1(\mathbf{p})$ und $\lambda_2(\mathbf{p}) =$

$\lambda_2(\mathbf{p})$, so würden sich die Kegelschnitte $C\lambda_1(\mathbf{p})$ und $C\lambda_2(\mathbf{p})$ in den Punkten $\mathbf{p}$ und $\mathbf{p}$ schneiden. Aus der Gestalt der Kegelschnitte ist klar, daß mit $\mathbf{p}$ und $\mathbf{p}$ alle acht

Punkte

$(\pm p_1, \pm p_2)$ und $(\pm p, \pm p)$

1

2

in $C\lambda_1(\mathbf{p}) \cap C\lambda_2(\mathbf{p})$ liegen. Dies ergibt einen Widerspruch zu Satz 4.8.

.

.

.

4.4 Konfokale Kegelschnitte

201

Um zu beweisen, daß die Abbildung surjektiv ist, müssen wir zeigen, daß für jedes

λ 1 ∈ (−∞,a 2) und jedes λ

,a 2) die Ellipse C

und die Hyperbel C

einen

2

2 ∈ (a 2

2

1

λ 1

λ 2

Schnittpunkt in Q haben. Dazu sei für 0 ≤ t < a 2 − λ

1

1

ϕ(t) := (a 2 − λ

2

1)

$1 -$

t

$a\ 2 - \lambda$

1

1

Dann ist

$\sqrt{t}, \phi(\ t) \in C\lambda\ 1$

$\sqrt{}$

und für $0 < t < a\ 2 - \lambda$

$t,$

$\phi(\ t)$

in Q.

1

1 liegt der Punkt

Setze

t

$\phi(\ t)$

$f\ (\ t) :=$

$+$

.

$a\ 2 - \lambda$

a 2 − λ

1

2

2

2

Dann ist

a 2 − λ

a 2 − λ

f (0) =

2

1 < 0 und f(a 2 − λ

1

1 > 1 .

a 2 − λ

1

1) = a 2 − λ

2

2

1

2

Nach dem Zwischenwertsatz gibt es t 0 ∈ (0 ,a 2 − λ

1

1), so daß $f(t_0) = 1$. Der Punkt

$\sqrt{t_0}, \phi(t_0)$ liegt dann in $Q \cap C_\lambda \cap C$.

✷

1

λ_2

Die zu der Ellipse E_a

konfokalen Kegelschnitte spielen eine wichtige Rolle bei

$_1, a_2$

der Untersuchung des Billiards im Innern dieser Ellipse. Stellen Sie sich vor, ein

Billiardball, der im Innern der Ellipse liegt, werde in irgendeine Richtung ange-

stoßen. Bis zur ersten Reflexion am Rand der Ellipse bewegt er sich dann auf einer

Geraden g. Falls diese Gerade g zufällig durch einen der Brennpunkte geht, so haben

wir die weitere Bewegung des Balls in Satz 4.6 untersucht: Nach einer Reflexion

bewegt sich der Ball auf einer Geraden durch den anderen Brennpunkt, nach zwei

Reflexionen wieder auf einer Geraden durch den ursprünglichen Brennpunkt, etc..

..

Ubung: In diesem Fall bezeichne $x_1(t), x_2(t)$ die Lage des Billiardballs

zur Zeit t. Zeigen Sie:

$\lim x_2(t) = 0$!

$t \to \infty$

Falls g zufällig die Achse

$(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$x_1 = 0\}$ ist, so oszilliert der Billiardball

zwischen den Punkten $(0, \pm a_2)$.

Ist g keine der oben betrachteten Geraden, so werden wir unten in Lemma 77

beweisen, daß es genau einen zu E_{a_1, a_2}

konfokalen Kegelschnitt C_λ

gibt, so daß g

Tangentialgerade oder Asymptotenlinie von C_λ ist. In Satz 4.10 unten werden wir

beweisen, daß die Gerade g, auf der sich der Billiardball nach der Reflexion bewegt,

ebenfalls Tangentialgerade oder Asymptotenlinie von C_λ ist. Dasselbe gilt dann für

die Bewegung des Biliardballs nach zwei, drei oder mehr Reflexionen. Wenn C_λ eine

Ellipse ist, so ergibt sich für die Bahn des Billiardballs eine Gestalt wie in Bild 4.22.

Falls C_λ eine Hyperbel ist, so sieht die Bahn des Billiardballs etwa wie in Bild

4.23 aus.

Es bleibt, das angekündigte Lemma und den angekündigten Satz präzise zu formulieren, und zu beweisen.

.

Bild 4.22

Bild 4.23

Lemma 77 *Sei g eine Gerade, die nicht durch einen der Brennpunkte von Ea* 1 *,a* 2

geht und von der x 2 *-Achse* (*x* 1 *,x* 2) ∈ R2

x 1 = 0 *verschieden ist. Dann gibt es*

genau ein λ ∈ (−∞*,a* 2) ∪ (*a* 2 *,a* 2) *, so daß g Tangentialgerade oder Asymptotenlinie*

2

2

1

von Cλ ist. Falls g die Strecke zwischen den beiden Brennpunkten von Ea

trifft,

1 *,a* 2

so ist Cλ eine Hyperbel, sonst eine Ellipse.

Beweis Schreibe *g* = *{***p** + *t* · **v** */t* ∈ R *}* mit **p** , **v** ∈ R2

1. Fall::

f und **f** liegen auf derselben Seite von g :

Nach Satz 4.9 gibt es keine zu Ea

konfokale Hyperbel, die an g tangential ist.

1 ,a 2

Aus Symmetriegründen können wir annehmen, daß p 1 < 0 , p 2 ≥ 0 , v 1 ≥ 0 ,v 2 ≥ 0 .

Für t ∈ R bezeichne α (t) den Betrag des Winkels zwischen dem Strahl von **p** + t**v**

aus in Richtung −**v** und dem Strahl von **p** + t**v** nach **f** , und α(t) den Betrag des Winkels zwischen dem Strahl von **p** + t**v** aus in Richtung **v** und dem Strahl von

p + t**v** nach **f** .

.

4.4 Konfokale Kegelschnitte

203

p+tv

α(t)

α’(t)

g

f’

f

Bild 4.24

Nach Satz 4.6 ist g genau dann Tangentialgerade einer zu Ea

konfokalen Ellipse

1 ,a 2

durch **p** + t**v**, wenn $\alpha(t) = \alpha(t)$. Nun ist $\alpha(t)$ eine streng monoton fallende stetige Funktion mit $\lim t \to -\infty\ \alpha(t) = 180^\circ$ und $\lim t \to +\infty\ \alpha(t) = 0^\circ$. Ebenso ist $\alpha(t)$ eine streng monoton wachsende Funktion mit $\lim t \to -\infty\ \alpha(t) = 0^\circ$ und $\lim t \to +\infty\ \alpha(t) =$

180°. Aus der Monotonie und dem Zwischenwertsatz folgt, daß es genau ein $t \in$ R

gibt mit $\alpha(t) = \alpha(t)$.

180o

α(t)

α’(t)

Bild 4.25

2. Fall::

f und **f** liegen auf verschiedenen Seiten von g.

Wie oben folgt aus Satz 4.9 , daß es keine zu Ea

konfokale Ellipse gibt, die an

1 a 2

g tangential ist. Aus Symmetriegründen können wir annehmen, daß $p_1 \geq 0$, $p_2 =$

0 , $v_1 \geq 0$,$v_2 \geq 0$. Im Fall $p_1 = 0$ ist g Asymptotenlinie einer zu Ea konfokalen

1 a 2

Hyperbel. Deswegen beschränken wir uns auf den Fall $p_1 > 0$. Es bezeichne $\beta(t)$

(bzw. $\beta(t)$) den Betrag des Winkels zwischen dem Strahl von **p** + t**v** aus in

Richtung

v und dem Strahl von **p** + *t***v** nach **f** (bzw. **f**). Nach Satz 4.7 ist *g* genau dann in **p** + *t***v** zu einer zu *Ea*

konfokalen Hyperbel tangential, wenn β (*t*) = β(*t*) . Siehe

1 *a* 2

Bild 4.26.

Nun ist β (0) − β(0) ≥ 0, während für große Werte von *t*

β (*t*) − β(*t*) < 0 (da

ja *p* 1 > 0). Nach dem Zwischenwertsatz existiert mindestens ein *t* mit β (*t*) = β(*t*).

Um die Eindeutigkeit zu zeigen, nehmen wir an, es gäbe *t* 1 < *t* 2 mit β (*t* 1) = β(*t* 1) und β (*t* 2) = β(*t* 2). Siehe Bild 4.27

.

β’(t)p+tv β(t)

p

f’

f

g

Bild 4.26

β’(t)2 p+t v2 β(t)2

β’(t)1 β(t)1

p+t v

1

p

f’

f

g

Bild 4.27

Dann wären die Dreiecke **f** , **p**+ *t* 1**v** , **p**+ *t* 2**v** und **f** , **p**+ *t* 1**v** , **p**+ *t* 2**v** kongruent, weil die Strecken zwischen **p** + *t* 1**v** und **p** + *t* 2**v** übereinstimmten und die angrenzenden

Winkel gleich wären. Folglich wäre

p + *t* 1**v** − **f**

= **p** + *t* 1**v** − **f**

und

p + *t* 2**v** − **f**

= **p** + *t* 2**v** − **f**

Deshalb lägen sowohl **p** + *t* 1**v** als auch **p** + *t* 2**v** auf der Mittelsenkrechten von **f** und **f** . Somit würde *g* mit dieser Mittelsenkrechten, also der *x* 2 - Achse übereinstimmen.

✷

Die Reflexion eines Billiardballs an der Ellipse *Ea*

erfolgt nach dem Prinzip

1 ,*a* 2

Einfallswinkel = Ausfallswinkel“. Betrachten wir die Situation, daß ein Billiardball

”

längs einer Geraden g von innen kommend auf einen Punkt $\mathbf{p} \in Ea$

auftrifft. Das

1 ,a 2

Reflexionsgesetz besagt, daß die Gerade g , auf der sich der Billiardball nach der

Reflexion bewegt, mit der Tangentialgeraden an Ea

im Punkt $\mathbf{p}$ den gleichen

1 , a 2

.

Winkel bildet wie g. Die Behauptung über die Reflexion des Billiardballs an der

Ellipse Ea

kann also folgendermaßen formuliert werden:

1 , a 2

Satz 4.10 *Sei* $\mathbf{p} \in E := Ea$

und seien g,g zwei verschiedene Geraden durch $\mathbf{p}$,

1 ,a 2

die mit der Tangentialgerade t an E in $\mathbf{p}$ *den gleichen Winkel α einschließen. Ist*

$\lambda \in (-\infty, a\ 2) \cup (a\ 2\ ,\ a\ 2)$ *so daß g Tangentialgerade oder Asymptotenlinie von*

C

1

1

2

λ ist,

so ist auch g Tangentialgerade oder Asymptotenlinie von Cλ (siehe Bild 4.28).

E

P

g’

Cλ

g

Bild 4.28

Beweis Wir betrachten den Fall, daß *g* die Strecke zwischen den Brennpunkten **f**

und **f** nicht trifft. Der andere Fall kann ähnlich behandelt werden.

Nach Lemma 77 ist *Cλ* eine Ellipse. Nach Satz 4.6 schließen **fp** und **f p** denselben

Winkel *β* mit der Tangentialgeraden *t* ein. Deshalb trifft auch *g* die Strecke zwischen

f und **f** nicht. Mit ˜

f bezeichnen wir das Spiegelbild von **f** bezüglich der Geraden *g*

und mit ˜

f das Spiegelbild von **f** bzgl. *g* . Seien **q** bzw. **q** die Schnittpunkte von *g*

bzw. g mit den Geraden ˜

f f bzw. ˜

f f (siehe Bild 4.29).

Wähle Punkte **r** bzw. **r** auf g bzw. g , so daß **q** bzw. **q** zwischen **r** und **p** bzw. **r** und **p** liegen. Dann ist

fqr =

rq˜

f =

pqf

Ist C die Ellipse mit Brennpunkten **f** und **f** , die durch **q** geht, so ist nach Satz

4.6 g die Tangentialgerade an C in **q**. Nach Lemma 77 gibt es aber nur eine zu E

konfokale Ellipse, die tangential zu g ist. Also ist

$C = C\lambda$

Ebenso hat die zu E konfokale Ellipse C , die durch **q** geht, die Gerade g als

Tangentialgerade. Die Behauptung des Satzes ist, daß

$C = C$

Nach Satz 4.2 ist

C

= { **x** ∈ R2 /

x − **f**

+

$\mathbf{x} - \mathbf{f}$

$=$

$\mathbf{q} - \mathbf{f}$

$+$

$\mathbf{q} - \mathbf{f}$

$\}$

C

$= \{ \mathbf{x} \in R2 /$

$\mathbf{x} - \mathbf{f}$

$+$

$\mathbf{x} - \mathbf{f}$

$=$

$\mathbf{q} - \mathbf{f}$

$+$

$\mathbf{q} - \mathbf{f}$

$\}$

.

t

P

2α−β

β

α

α

β

2α−β

q’

~

f’

q

~

f

r’

f’

f

g’

r

g

Bild 4.29

Also genügt es zu zeigen, daß

q − f

+

q − **f**

=

q − **f**

+

q − **f**

Da

q − **f**

=

q − ˜**f**

und

q − **f**

=

q − ˜**f** , ist dies äquivalent zu

˜

f − **f**

=

f − ˜**f**

(4.13)

Um (4.13) zu beweisen, betrachten wir die Dreiecke **f p** ˜

f und ˜

f p f . Nach Konstruk-

tion haben die Strecken **fp** und ˜

f p die gleiche Länge. Ebenso haben die Strecken **p**˜

f

und **pf** die gleiche Länge. Schließlich schließt sowohl die Gerade ˜

f p als auch die

Gerade ˜

f p mit t den Winkel $\alpha - (\beta - \alpha) = 2\alpha - \beta$ ein. Folglich ist

$(2\alpha - \beta) +$ ˜**f pf** $+ \beta = 180^\circ$

$\beta +$

f p˜

f $+ (2\alpha - \beta) = 180^\circ$

und somit

˜

f pf =

f p˜

f

Dies zeigt, daß die Dreiecke **f p** ˜

f und ˜

f p f kongruent sind. Insbesondere ist also

f − ˜**f**

=

f − ˜**f** .

✷

.

4.4 Konfokale Kegelschnitte

207

Für eine weitere Diskussion von Eigenschaften des elliptischen Billiards siehe

[Birkhoff] VIII.12.

..

Ubung: Bei dem Beweis von Satz 4.9 wurde auf die Anschauung Bezug genommen.

Geben Sie einen rein rechnerischen Beweis von Satz 4.9 !

..

Ubung: Nehmen wir an, Sie haben die folgenden Utensilien:

a) Ein großes Stück Papier,

b) einen Bleistift,

c) eine schwere, flache Steinscheibe in Form einer Ellipse und

d) ein Stück Bindfaden, das länger ist als der Umfang des Ellipsensteins.

Legen Sie den Stein auf das Papier, knoten sie den Bindfaden an den beiden Enden

zusammen und legen Sie ihn um den Stein. Straffen Sie den Faden mit der Bleistift-

spitze und fahren Sie mit dem Bleistift so um den Stein, daß der Faden stets

straff

gespannt bleibt - es entsteht eine Figur (siehe Bild 4.30). Beweisen Sie, daß diese

Figur eine Ellipse ist!

E

Bild 4.30

Der in der obigen Übung bewiesene Satz wird Ch.Graves (1812-1899, ab 1860 Bischof

von Limerick) zugeschrieben; ein allgemeineres Resultat findet sich aber schon in ei-

nem Brief von Leibniz an Johann Bernoulli aus dem Jahre 1704 (siehe [Salmon–Fiedler],

Fußnote zu $N \circ 246$).

..

Ubung: Untersuchen Sie die Bilder der Mengen $\{ z \in \mathrm{C} \mid \mathrm{Re}\, z = \alpha \}$ und

$\{ z \in \mathrm{C} \mid \mathrm{Im}\, z = \beta \}$ unter der Abbildung $\mathrm{C} \longrightarrow \mathrm{C}$, $z \to \cos z$!

.

4.5

Die S¨

atze von Pascal und Brianchon

Wir formulieren zunächst schlagwortartig die beiden Sätze, von denen dieser Ab-

schnitt handelt.

Der Satz von Pascal

D ie Schnittpunkte gegenüberliegender Seiten eines in einen Kegelschnitt einbeschrie-

benen Sechsecks liegen auf einer Geraden.

Bild 4.31

Der Satz von Brianchon

D ie Verbindungsgeraden gegenüberliegender Ecken eines einem Kegelschnitt umbe-

schriebenen Sechsecks gehen alle durch einen Punkt oder sind alle parallel.

Bild 4.32

Die eben gegebenen Formulierungen der Sätze von Pascal und Brianchon bedürfen

der Präzisierung. Beispielsweise können ja gegenüberliegende Seiten eines in einen

.

Kegelschnitt einbeschriebenen Sechsecks parallel sein. (Wir sagen, zwei Geraden *g*,

g in R2 seien *parallel*, wenn $g \cap g = \emptyset$ oder $g = g$.)

In diesem Abschnitt formulieren wir die Sätze von Pascal und Brianchon präzise,

und diskutieren Anwendungen und Spezialfälle dieser Sätze. Im nächsten Abschnitt

werden wir zeigen, daß der Satz von Pascal aus dem Satz von Brianchon folgt. Einen

Beweis des Satzes von Brianchon geben wir erst im nächsten Kapitel, nämlich im

Abschnitt 5.3. Wir formulieren nun den Satz von Pascal exakt.

Satz 4.11 (Pascal) *Sei C ein Kegelschnitt und* **p**(1) *, . . . ,* **p**(6) *Punkte von C. Wir*

setzen **p**(7) := **p**(1) *und nehmen an, daß*

p(*j*) = **p**(*j*+1)

f¨

ur j = 1 , . . . , 6 .

Sei gj die Verbindungsgerade von **p**(*j*) *und* **p**(*j*+1) . *Wir nehmen zus¨*

atzlich an, daß

gj = gj+3

f¨

ur j = 1 , 2 , 3 .

i) Sind weder g 1 *und g* 4 *noch g* 2 *und g* 5 *noch g* 3 *und g* 6 *parallel, so liegen die Schnittpunkte* **q**(1) *von g* 1 *und g* 4 *,* **q**(2) *von g* 2 *und g* 5 *,* **q**(3) *von g* 3 *und g* 6 *auf einer Geraden (siehe Bild 4.33).*

p(1)

p(2)

p(6)

p(3)

p(5)

p(4)

g

g

1

6

g4

g

g5

3

g2

q(3)

q(2)

q(1)

Bild 4.33

ii) Sind g 1 *und g* 4 *parallel, und schneiden sich g* 2 *und g* 5 *in einem Punkt* **q**(2) *und g* 3 *und g* 6 *in einem Punkt* **q**(3) *, so ist die Gerade durch* **q**(2) *und* **q**(3) *parallel zu g* 1 *und g* 4 *, oder* **q**(2) = **q**(3) *(siehe Bild 4.34).*

iii) Sind g 1 *und g* 4 *parallel und g* 2 *und g* 5 *parallel, so sind auch g* 3 *und g* 6 *parallel (siehe Bild 4.35).*

Da man beim Satz von Pascal die Numerierung der Punkte **p**(1), . . . , **p**(6) zyklisch

abändern kann, erfassen die Fälle i)–iii) im obigen Satz alle möglichen Lagen der

Punkte **p**(*j*).

210

4 Kegelschnitte

q(3)

q(2)

g3

g5

g

g2

6

p(4)

p(5)

p(3)

p(6)

p(1)

p(2)

Bild 4.34

p(4)

p(5)

p(3)

p(6)

p(1)

p(2)

Bild 4.35

Wie am Anfang dieses Abschnitts gesagt, beweisen wir den Satz von Pascal erst

später unter Verwendung von Dualität und räumlicher Geometrie. Einen Beweis des

Satzes von Pascal im Rahmen der ebenen Geometrie (unter Verwendung des Dop-

pelverhältnisses) findet man in [Fischer] 3.5.12 oder [Berger] 16.2; einen etwas an-

spruchsvolleren Beweis, der auf dem Satz von Bézout beruht, in [Brieskorn–Knörrer]

6.2. Es ist übrigens nicht bekannt, wie Pascal seinen“ Satz, den er auch den Satz

”

vom mystischen Sechseck“ nannte, bewiesen hat (siehe [Löffel] *§* 2).

”

Korollar 73 besagt, daß fünf Punkte, von denen keine vier auf einer Geraden liegen,

einen Kegelschnitt bestimmen. Der Satz von Pascal ermöglicht es, diese Aussage

effektiv“ zu machen. Das heißt, wir können eine Vorschrift angeben, mit der man

”

die Punkte des Kegelschnitts aus den gegebenen fünf Punkten konstruieren kann:

Wenn drei der fünf Punkte auf einer Geraden liegen, so ist der Kegelschnitt nach

Proposition 66 und Satz 4.1 ein Geradenpaar. Eine der beiden Geraden ist die Gerade

durch diese drei Punkte, und die andere Gerade ist dann die Verbindungsgerade der

beiden verbliebenen Punkte. Wir betrachten also nur den nichttrivialen“ Fall, daß

”

von den fünf gegebenen Punkten **p**(1), . . . , **p**(5) keine drei auf einer Geraden liegen.

.

Es sei *C* der nach Korollar 73 eindeutig bestimmte Kegelschnitt, der die Punkte

p(1), . . . , **p**(5) enthält. Mit *gj* bezeichnen wir die Verbindungsgerade von **p**(*j*) und **p**(*j*+1) mit *j* = 1, 2, 3, 4. Nach eventueller Umnumerierung der Punkte **p**(1), . . . ,

p(5) können wir annehmen, daß sich die Geraden *g* 1 und *g* 4 in einem Punkt **q**(1)

schneiden.

Wir wählen nun irgendeine Gerade *l* durch **q**(1), die von *g* 1 und *g* 4 verschieden

ist, und betrachten zunächst den Fall, daß *l* weder zu *g* 2 noch zu *g* 3 parallel ist. Mit

q(2)(*l*) bzw. **q**(3)(*l*) bezeichnen wir den Schnittpunkt von *l* mit *g* 2 bzw. *g* 3, und wir nennen *g* 5(*l*) bzw. *g* 6(*l*) die Verbindungsgeraden von **q**(2)(*l*) und **p**(5) bzw. **q**(3)(*l*) und **p**(1). Falls sich nun *g* 5(*l*) und *g* 6(*l*) in einem Punkt **p**(6)(*l*) schneiden, so liegt der Schnittpunkt **p**(6)(*l*) auf *C* (Bild 4.36).

g (l)

6

p(1)

p(5)

g (l)

5

p(6)(l)

q(2)(l)

g3

p(4)

g2

p(2)

p(3)

q(3)(l)

g

g

1

4

l

q(1)

Bild 4.36

Schneidet nämlich $g\ 5(\ l)$ den Kegelschnitt C in einem von $\mathbf{p}(5)$ verschiedenen Punkt

$\mathbf{x}$, so liegt nach dem Satz von Pascal der Schnittpunkt der Verbindungsgeraden g

von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{p}(1)$ mit $g\ 3$ auf l (der Verbindungsgeraden von $\mathbf{q}(1)$ und $\mathbf{q}(2)(\ l)$), ist also gleich $\mathbf{q}(3)(\ l)$. Also ist dann $g = g\ 6(\ l)$ und somit $\mathbf{x} = \mathbf{p}(6)(\ l)$. Damit ist die Behauptung, daß $\mathbf{p}(6)(\ l) \in C$ gezeigt, falls $g\ 5(\ l)$ den Kegelschnitt C in einem von $\mathbf{p}(5)$ verschiedenen Punkt schneidet. Ebenso zeigt man die Behauptung in dem Fall,

daß $g\ 6(\ l)$ den Kegelschnitt C in einem von $\mathbf{p}(1)$ verschiedenen Punkt schneidet. Wir

haben nun noch den Fall zu betrachten, daß $\mathbf{p}(5)$ bzw. $\mathbf{p}(1)$ die einzigen Schnittpunkte

von $g\ 5(\ l)$ resp. $g\ 6(\ l)$ mit C sind. Dazu verwenden wir ein Stetigkeitsargument“.

”

..

Ubung: Sei C eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel und $\mathbf{p} \in C$. Zeigen Sie, daß es

höchstens drei Geraden durch $\mathbf{p}$ gibt, die C nur im Punkt $\mathbf{p}$ schneiden!

.

Aus der obigen Übung folgt, daß es nur endlich viele Geraden l gibt, für die

sowohl $g\ 5(\ l)$ als auch $g\ 6(\ l)$ den Kegelschnitt C nur in einem Punkt schneiden. Wir

bezeichnen mit L die Menge aller Geraden durch $\mathbf{q}(1)$. Mit L bezeichnen wir die

Menge aller Geraden durch $\mathbf{q}(1)$, die von $g\ 1$ und $g\ 4$ verschieden sind, die

weder zu g 2

noch zu g 3 parallel sind und für die sich g 5(l) und g 6(l) in einem Punkt schneiden.

Ferner sei L die Menge aller derjenigen $l \in L$ für die g 5(l) den Kegelschnitt C in

einem von **p**(5) verschiedenen Punkt trifft. Dann ist L das Komplement von endlich

vielen Elementen in L. Ist f (x 1 ,x 2) = 0 eine Gleichung für C, so gilt also

f **p**(6)(l) = 0

für alle $l \in L$.

(4.14)

Die Abbildung

ϕ : S 1 = **v** ∈ R2

v = 1 → L

v → {**q**(1) + t · **v** | t ∈ R }

bildet zwei Vektoren **v**, **v** genau dann auf dieselbe Gerade ab, wenn **v** = ±**v**.

Folglich ist ϕ− 1(L) das Komplement endlich vieler Punkte in S 1, insbesondere also

dicht in ϕ− 1(L). Nun ist die Funktion

ϕ− 1(L) → R

v → f **p**(6) ϕ(**v**)

stetig und nach (4.14) identisch Null auf der dichten Teilmenge ϕ− 1(L). Also ist

$f\,\mathbf{p}(6)\,\phi(\mathbf{v})$

$= 0$

für alle $\mathbf{v} \in \phi - 1(L)$

Das heißt

$f\,\mathbf{p}(6)(l) = 0$

für alle $l \in L$

und damit ist die Behauptung, daß $\mathbf{p}(6)(l) \in C$, für alle l, für die sie überhaupt

sinnvoll ist, gezeigt.

Betrachten wir nun noch die Situation, daß l parallel zu einer der beiden Geraden

$g\,2$ oder $g\,3$ ist. Ist l etwa parallel zu $g\,3$, aber nicht zu $g\,2$, so definiert man $\mathbf{q}2(l)$ und $g\,5(l)$ wie oben, und ersetzt $g\,6(l)$ durch die Parallele zu l durch $\mathbf{p}(1)$. Dann verfährt man wie oben. Analog geht man vor, wenn l parallel zu $g\,2$ ist.

Da $\mathbf{p}(2)$, $\mathbf{p}(3)$ und $\mathbf{p}(4)$ nicht auf einer Geraden liegen, sind $g\,2$ und $g\,3$ nicht parallel.

Wir haben also alle möglichen Lagen von L betrachtet, und für fast alle Lagen einen

Punkt von C erhalten. Der Satz von Pascal besagt nun, daß sich jeder von $\mathbf{p}(1), \ldots,$

$\mathbf{p}(5)$ verschiedene Punkt aus der oben beschriebenen Konstruktion ergibt.

Der Satz von Pascal ist für beliebige Kegelschnitte formuliert. Die Voraussetzun-

gen an die Geraden gj implizieren jedoch, daß nicht alle sechs Punkte $\mathbf{p}(1), \ldots,$

$\mathbf{p}(6)$ auf einer Geraden liegen. Nach der Klassifikation von Kegelschnitten aus Satz

4.1 ist der Kegelschnitt C also eine Ellipse, Parabel, Hyperbel, oder die

Vereinigung

.

4.5 Die Sätze von Pascal und Brianchon

213

zweier verschiedener Geraden. In den Abschnitten 4.6 und 5.3 werden wir den Satz

von Pascal für Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln beweisen. Unter anderem deswe-

gen betrachten wir jetzt den Spezialfall, daß C die Vereinigung zweier verschiedener

Geraden l 1, l 2 ist. Die Voraussetzungen des Satzes von Pascal implizieren, daß nicht

mehr als vier der Punkte auf einer Geraden liegen.

..

Ubung: Beweisen Sie den Satz von Pascal für den Fall, daß C die Vereinigung zweier

verschiedener Geraden ist und vier der Punkte auf einer der beiden Geraden liegen!

Wir konzentrieren uns auf den Fall, daß drei der sechs Punkte **p**(1), . . . , **p**(6) auf

l 1 liegen, und drei auf l 2. Ähnlich wie in der Übung oben verifiziert man den Satz

von Pascal direkt in dem Fall, daß zwei aufeinanderfolgende Punkte auf einer der

beiden Geraden liegen. Liegen etwa **p**(3) und **p**(4) auf l 1, so sind bis auf Umkehrung

der Numerierung nur die in Bild 4.37 angedeuteten Konstellationen möglich.

g5

l = g = g

2

3

4

p(5)

p(4)

p(3)

g

p(1)

p(2)

p(6)

6

l = g

2

3

l = g = g

q

1

1

6

(1) = q(3)

p(6) = q(3)

l

q(2)

p(4)

l = g5

g2

p(3)

q(2)

p(5) = q(1)

l = g

1

1

p(1)

p(2)

g4

Bild 4.37

Der verbleibende Fall, daß **p**(*j*) und **p**(*j*+1) abwechselnd auf verschiedenen Geraden

liegen, ist ein Satz der klassischen griechischen Geometrie.

Satz 4.12 (Pappos) *Seien* l 1 *und* l 2 *zwei verschiedene Geraden, und seien* **p**(1) ,

p(3) , **p**(5) ∈ l 1 *und* **p**(2) , **p**(4) , **p**(6) ∈ l 2 . *Keiner dieser Punkte liege auf* l 1 ∩ l 2 *(diese Voraussetzung ist trivialerweise erf¨*

ullt, wenn l 1 *und* l 2 *parallel sind). Wir setzen*

wieder **p**(7) := **p**(1) *und bezeichnen mit gj die Verbindungsgeraden von* **p**(j) *und*

p(j+1) *f¨*

ur j = 1 , . . . , *6. Ferner nehmen wir an, daß gj = gj*+3 *für* j = 1 , *2, 3.*

1) Sind weder g 1 *und* g 4 *noch* g 2 *und* g 5 *noch* g 3 *und* g 6 *parallel, so liegen die Schnittpunkte* **q**(1) *von* g 1 *und* g 4 , **q**(2) *von* g 2 *und* g 5 , *und* **q**(3) *von* g 3 *und* g 6

auf einer Geraden (Bild 4.38).

g2

g5

q(2)

g4

l2

p(5)

p(3)

g6

p(1)

l

g

q(3)

5

g2

q(2)

p(2)

p(4)

l1

p(6)

g1

g3

q(1)

p(3)

p(1)

p(5)

l1

q(3)

p

l

(2)

p(4)

p(6)

2

g

g6

3

q(1)

g

g1

4

Bild 4.38

.

4.5 Die Sätze von Pascal und Brianchon

215

2) Sind g 1 *und g* 4 *parallel, und schneiden sich g* 2 *und g* 5 *in einem Punkt* **q**(2) *und g* 3 *und g* 6 *in einem Punkt* **q**(3) *, so ist die Gerade durch* **q**(2) *und* **q**(3) *parallel zu g* 1 *und g* 4 *(Bild 4.39)*

g

g

2

1

g4

g5

q(2)

g3

g6

p(3)

p(1)

p(5)

l1

g5

g2

q(3)

q(2)

g

l

4

1

l2

p(5)

p(2)

p(4)

p(6)

g1

p(3)

p(1)

q(3)

g6

l2

p(2)

p(4)

p(6)

g3

Bild 4.39

3) Sind g 1 *und g* 4 *parallel und g* 2 *und g* 5 *parallel, so sind auch g* 3 *und g* 6 *parallel (Bild 4.40).*

l1

p(5)

p(3)

p(1)

p(5)

l1

p(3)

p(1)

p(2)

p(6)

l

p(4)

2

l2

p(2)

p(6)

p(4)

Bild 4.40

.
.
.
.
.
.
.

Proposition 78 *Gilt der Satz von Pascal f*¨

ur Hyperbeln, so gilt der Satz von Pappos

f¨

ur Paare sich schneidender Geraden.

Beweis Nach Anwenden einer orientierungserhaltenden Kongruenz können wir an-

nehmen, daß es a 1, a 2 > 0 gibt, so daß

x

l

1

1 =

(x 1 ,x 2) ∈ R2

− x 2 = 0

a 1

a 2

x

x

l

1

2

2 =

(x 1 ,x 2) ∈ R2

+

= 0

.

a 1

a 2

Für t ∈ R sei

x 2

x 2

H

1

2

t :=

(x 1 ,x 2) ∈ R2

−

= t

.

a 2

a 2

1

2

Für t = 0 ist Ht eine Hyperbel, und H 0 = l 1 ∪ l 2. Wähle kleine Umgebungen Uj von **p**(j) in R2, so daß Uj ∩ Uj+1 = ∅ für j = 1, . . . , 6. (Setze U 7 := U 1.) Dann gibt es ε > 0, so daß für alle t ∈ R mit |t| < ε

g 1 ∩ Ht ∩ U 1

aus einem Punkt **p**(1)(t) besteht,

g 1 ∩ Ht ∩ U 2

aus einem Punkt **p**(2)(t) besteht,

g 2 ∩ Ht ∩ U 3

aus einem Punkt **p**(3)(*t*) besteht,

$g\,4 \cap Ht \cap U\,4$

aus einem Punkt **p**(4)(*t*) besteht,

$g\,4 \cap Ht \cap U\,5$

aus einem Punkt **p**(5)(*t*) besteht,

$g\,5 \cap Ht \cap U\,6$

aus einem Punkt **p**(6)(*t*) besteht.

(4.15)

(siehe Bild 4.41). Dann ist

$\lim \mathbf{p}(j)(t) = \mathbf{p}(j)$

für $j = 1, \ldots, 6$.

$t \to 0$

l2

p(4)

p(1)

p(4)(t)

p(1)(t)

p(5)

p(5)(t)

p(6)(t)

p(3)(t)

p(6)

p(2)(t)

p(3)

p(2)

Ht

l1

Bild 4.41

Mit $gj(t)$ bezeichnen wir die Verbindungsgerade von $\mathbf{p}(j)(t)$ und $\mathbf{p}(j+1)(t)$. Offenbar ist

.

4.5 Die Sätze von Pascal und Brianchon

217

$g\,1(t) = g\,1$

und

$g\,4(t) = g\,4$

für alle $|t| < \varepsilon$.

Fall 1 : Weder $g\,1$ und $g\,4$ noch $g\,2$ und $g\,5$ noch $g\,3$ und $g\,6$ sind parallel. Dann gibt es $0 < \varepsilon \leq \varepsilon$, so daß für alle $t \in \mathrm{R}$ mit $|t| \leq \varepsilon$ weder $g\,2(t)$ und $g\,5(t)$ noch $g\,3(t)$ und $g\,6(t)$ parallel sind. Bezeichne mit $\mathbf{q}(j)(t)$ den Schnittpunkt von $gj(t)$ und $gj+3(t)$ mit $j = 1, 2, 3$. Dann ist

$\lim \mathbf{q}(j)(t) = \mathbf{q}(j)$

für $j = 1, 2, 3$.

$t \to 0$

Nach dem Satz von Pascal für Hyperbeln gibt es für $0 < |t| < \varepsilon$ eine Gerade $l(t)$,

die die Punkte $\mathbf{q}(1)(t)$, $\mathbf{q}(2)(t)$, $\mathbf{q}(3)(t)$ enthält. Aus Stetigkeitsgründen gilt dies dann auch für die Punkte $\mathbf{q}(1) = \mathbf{q}(1)(0)$, $\mathbf{q}(2) = \mathbf{q}(2)(0)$ und $\mathbf{q}(3) = \mathbf{q}(3)(0)$. (Vergleichen

Sie mit der folgenden Übung!)

..

Ubung: Seien $\mathbf{q}(j) : (-\varepsilon,\varepsilon) \to R2$ stetige Abbildungen. Gibt es für alle $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$, $t = 0$ eine Gerade $l(t)$, die die Punkte $\mathbf{q}(1)(t)$, $\mathbf{q}(2)(t)$ und $\mathbf{q}(3)(t)$ enthält, so gibt es auch eine Gerade l, die die Punkte $\mathbf{q}(1)(0)$, $\mathbf{q}(2)(0)$ und $\mathbf{q}(3)(0)$ enthält!

Fall 2 : $g\,1$ und $g\,4$ sind parallel, aber $g\,2$ und $g\,5$ schneiden sich in $\mathbf{q}(2)$ und $g\,3$ und $g\,6$

scheiden sich in $\mathbf{q}(3)$. Wieder gibt es $0 < \varepsilon \leq \varepsilon$, so daß sich für $|t| \leq \varepsilon$ die Geraden

$g\,2(t)$ und $g\,5(t)$ in einem Punkt $\mathbf{q}(2)(t)$ und die Geraden $g\,3(t)$ und $g\,6(t)$ in einem Punkt $\mathbf{q}(3)(t)$ schneiden, und wieder gilt

$$\lim \mathbf{q}(j)(t) = \mathbf{q}(j)$$

für $j = 2, 3$.

$t \to 0$

Wendet man den Satz von Pascal auf die Hyperbeln Ht, $0 < |t| \leq \varepsilon$ an, so sieht man,

daß die Verbindungsgerade von $\mathbf{q}(2)(t)$ und $\mathbf{q}(3)(t)$ parallel zu $g\,1$ und $g\,4$ ist (Beachten Sie, daß $g\,1(t) = g\,1$, $g\,4(t) = g\,4$), wenn immer $\mathbf{q}(2)(t) = \mathbf{q}(3)(t)$! Nun ist $\mathbf{q}(2) = \mathbf{q}(3)$, denn sonst wäre $\mathbf{q}(2) = \mathbf{q}(3) \in g\,2 \cap g\,3$ und $\mathbf{q}(2) = \mathbf{q}(3) \in g\,5 \cap g\,6$. Der Schnittpunkt von $g\,2$ und $g\,3$ ist aber $\mathbf{p}(3)$, der von $g\,5$ und $g\,6$ ist $\mathbf{p}(6)$, und nach Voraussetzung ist $\mathbf{p}(3) = \mathbf{p}(6)$. Nun folgt wieder aus Stetigkeitsgründen, daß die Verbindungsgerade

von $\mathbf{q}(2)$ und $\mathbf{q}(3)$ zu $g\,1$ und somit auch zu $g\,4$ parallel ist.

Fall 3 : Sowohl g 1 und g 4 als auch g 2 und g 5 sind parallel. Diesen Fall beweisen

wir direkt, das heißt ohne Bezugnahme auf den Satz von Pascal für Hyperbeln.

Stattdessen verwenden wir *Streckungen* vom Nullpunkt aus. Das sind Abbildungen

der Form

$R2 \to R2$

$(x 1 ,x 2) \to (\lambda x 1 ,\lambda x 2) = \lambda(x 1 ,x 2)$

mit $\lambda \in R \setminus \{ 0 \}$. λ heißt auch der Streckungsfaktor.

..

Ubung: Zeigen Sie: Streckungen sind bijektive Abbildungen von R2 auf sich, die

Geraden in Geraden überführen! Das Bild einer Geraden g unter einer Streckung ist

eine zu g parallele Gerade!

Da $\mathbf{p}(1)$ und $\mathbf{p}(5)$ auf der Geraden l 1 durch den Nullpunkt liegen, gibt es $\lambda \in R$,

$\lambda = 0$, so daß

.
.
.
.
.

$\mathbf{p}(5) = \lambda \cdot \mathbf{p}(1)$.

Die Streckung um den Faktor λ bildet g 1 in die Parallele zu g 1 durch **p**(5) ab. Ferner

bildet sie die Gerade l 2 auf sich ab. Folglich bildet sie den Schnittpunkt **p**(2) von g 1

und l 2 auf den Schnittpunkt **p**(4) von g 4 und l 2 ab, das heißt

p(4) = $\lambda \cdot$ **p**(2)

Ebenso gibt es $\mu \in \mathrm{R} \setminus \{ 0 \}$ so daß

p(6) = $\mu \cdot$ **p**(2)

Wie oben zeigt man, daß

p(5) = $\mu \cdot$ **p**(3)

Folglich ist

μ

μ

p(6) =

$\cdot$ **p**(4)

und

p(1) =

$\cdot$ **p**(3)

λ

λ

Deshalb sind die Verbindungsgeraden g 6 von **p**(6) und **p**(1) und g 3 von **p**(3) und **p**(4)

parallel.

✷

Ähnlich beweist man

Proposition 79 *Gilt der Satz von Pascal f¨*

ur Ellipsen, so gilt der Satz von Pappos

f¨

ur parallele Geraden l 1 , l 2 .

Beweisskizze:

Wir können annehmen, daß es $a > 0$ gibt, so daß

l 1 = (x 1 ,x 2) ∈ R2 x 1 = a

und

l 2 = (x 1 ,x 2) ∈ R2 x 1 = −a .

Für $t > 0$ sei Et die Ellipse

x 2

x 2

E

1

2

t :=

(x 1 ,x 2) ∈ R2

+

= 1

a 2

t 2

Wir wählen wie oben Umgebungen *Uj* von **p**(*j*) und sehen, daß es $R > 0$ gibt, so

daß für $t > R$ die Aussagen (4.15) gelten, wenn *Ht* durch *Et* ersetzt wird. Die Fälle

1) und 2) des Satzes von Pappos folgen nun wie im Beweis von Proposition 78.

Der Fall 3) kann wieder direkt bewiesen werden: Die Translation *T* 1, die **p**(1) auf

p(5) abbildet, bildet **p**(2) auf **p**(4) ab. Die Translation *T* 2, die **p**(2) auf **p**(6) abbildet, bildet **p**(3) auf **p**(5) ab. Dann bildet die Translation $T := T\,2 \circ T - 1 = T - 1 \circ T$

1

1

2 den

Punkt **p**(4) auf **p**(6) und den Punkt **p**(3) auf **p**(1) ab. Folglich sind *g* 3 und *g* 6 parallel. ✷

.

4.6 Dualität

219

..

Ubung: Zeigen Sie: Gilt der Satz von Pascal für Ellipsen, so gilt er auch für Parabeln!

Zum Abschluß dieses Abschnittes formulieren wir den Satz von Brianchon. Er ist

dem Satz von Pascal sehr ähnlich (präzise werden wir die Ähnlichkeit im nächsten

Abschnitt formulieren). Allerdings hat Pascal

seinen“ Satz mehr als 150 Jahre

”

früher gefunden (vgl. [Kline] § 35 oder [Salmon–Fiedler] Band 2, Fußnote 7).

Satz 4.13 (Brianchon) *Sei C eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, und* **p**(1) *, . . .*
,

p(6) *Punkte von C. Sei gj die Tangentialgerade an C im Punkt* **p**(*j*) *. Wir nehmen*

an, daß sich gj und gj+1 *in genau einem Punkt* **q**(*j*) *schneiden* (*g* 7 := *g* 1) *.*
Ferner sei **q**(*j*) = **q**(*j*+3) *f¨*

ur j = 1 *, 2, 3. Wir bezeichnen mit lj die Verbindungsgerade von*

q(*j*) *und* **q**(*j*+1) *. Dann schneiden sich die drei Geraden l* 1 *, l* 2 *, l* 3 *in einem Punkt, oder l* 1 *, l* 2 *und l* 3 *sind parallel (siehe Bild 4.42).*

q(3)

g

q(2)

p(3)

3

p(4)

l

p(2)

g

3

4

l2

q(4)

g2

l1

q(1)

p(5)

g1

p(1)

g5

q(5)

g6

q(6)

p(6)

Bild 4.42

4.6

Dualit¨

at

Die Grundidee der Dualität ist — vom analytischen Standpunkt aus gesehen — fol-

gende: Die Punkte von R2 sind per definitionem Paare reeller Zahlen. Jede Gerade

g in R2, die nicht durch den Nullpunkt (0 , 0) geht, läßt sich auf eindeutige Weise in

der Form

$g = (x 1 ,x 2) \in$ R2 $ax 1 + bx 2 + 1 = 0$

mit einem von (0 , 0) verschiedenen Paar (a,b) reeller Zahlen schreiben. Bezeichnet

also G die Menge aller Geraden in R2, die nicht durch den Nullpunkt gehen, so ist

die Abbildung

.

R2 \ (0 , 0) $\rightarrow$ G,

die jedem Punkt **p** = (p 1 ,p 2) $\in$ R2 \ (0 , 0) die Gerade

p $*$:= (x 1 ,x 2) $\in$ R2 p 1 x 1 + p 2 x 2 + 1 = 0

zuordnet, eine Bijektion. **p** $*$ heißt die zum Punkt **p** *duale Gerade*. Die Umkehrab-

bildung ist die Abbildung

$G \rightarrow$ R2 \ (0 , 0) ,

die jeder Geraden

$g = (x 1 ,x 2) \in$ R2 $ax 1 + bx 2 + 1 = 0$

den Punkt

$g* := (a,b)$

zuordnet. $g*$ heißt der zu der Geraden *g duale Punkt*. Es gilt also

$(\mathbf{p}*)* = \mathbf{p}$

für alle $\mathbf{p} \in R2 \setminus (0, 0)$

(4.16)

$(g*)* = g$

für alle $g \in G$

Die wichtigste Eigenschaft ist

Lemma 80 *Seien* $\mathbf{p} \in R2 \setminus (0, 0)$ *und* $g \in G$. *Dann gilt*

$\mathbf{p} \in g \Longleftrightarrow g* \in \mathbf{p}*$

Beweis Sei

$\mathbf{p} = (p1, p2)$ und $g = (x1, x2) \in R2\ ax1 + bx2 + 1 = 0$.

Dann ist

$g* = (a,b)$

und

$\mathbf{p}* = (x1, x2) \in R2\ p1x1 + p2x2 + 1 = 0$.

Also gilt

$\mathbf{p} \in g \Longleftrightarrow ap1 + bp2 + 1 = 0 \Longleftrightarrow p1a + p2b + 1 = 0 \Longleftrightarrow g* \in \mathbf{p}*$

✷

.

4.6 Dualität

Eine im Weiteren nützliche Beobachtung ist

Lemma 81 *Seien* **p** *und* **q** *zwei verschiedene Punkte von* R2 \ (0 , 0) . *Dann geht die Verbindungsgerade von* **p** *und* **q** *genau dann durch* (0 , 0) *, wenn die dualen Geraden* **p** ∗ *und* **q** ∗ *parallel sind.*

Beweis Seien **p** = (p 1 ,p 2) und **q** = (q 1 ,q 2). Die Verbindungsgerade von **p** und **q** geht genau dann durch (0 , 0), wenn es $\lambda \in$ R, λ = 1 gibt, so daß **p** = λ**q**. Dies ist

genau dann der Fall, wenn das inhomogene lineare Gleichungssystem

p 1 x 1 + p 2 x 2 + 1 = 0

q 1 x 1 + q 2 x 2 + 1 = 0

keine Lösung (x 1 ,x 2) hat, das heißt, wenn **p** ∗ und **q** ∗ sich nicht schneiden.

✷

..

Ubung:

1) Ist **p** = (p 1 ,p 2) ein Punkt außerhalb des Einheitskreises, d.h. p 2 + p 2 > 1, so 1

2

kann man die zu **p** duale Gerade **p** ∗ folgendermaßen konstruieren. Sei

K := (x 1 ,x 2) ∈ R2 x 2 + x 2 = 1

1

2

der Einheitskreis. Nach Proposition 72 gibt es durch den Punkt −**p** genau

zwei Tangentialgeraden an K. Seien $\mathbf{q}1$ und $\mathbf{q}2$ die Berührungspunkte dieser Tangentialgeraden mit K. Dann ist $\mathbf{p}*$ die Verbindungsgerade von $\mathbf{q}1$ und $\mathbf{q}2$!

q1

-p

q

K

2

p*

Bild 4.43

2) Ist $\mathbf{p} \in K$, so ist $\mathbf{p}*$ die Tangentialgerade an K im Punkt $-\mathbf{p}$!

.

3) Liegt $\mathbf{p} = (0\ ,\ 0)$ im Inneren von K, d.h. $p\ 2 + p\ 2 < 0$, so erh

1

2

ält man $\mathbf{p}*$ folgender-

maßen. Wähle zwei verschiedene Geraden g und g durch $-\mathbf{p}$. Seien $\mathbf{q}1$ und $\mathbf{q}2$ bzw. $\mathbf{q}$ und $\mathbf{q}$ die Schnittpunkte von g bzw. g mit K. Die Tangenten an K

1

2

in den Punkten **q**1 und **q**2 schneiden sich in einem Punkt **r**, und entsprechend

schneiden sich die Tangenten an *K* in den Punkten **q** und **q** in einem Punkt

1

2

r . Dann ist **p** ∗ die Verbindungsgerade von **r** und **r** !

Die in dieser Übung beschriebene Konstruktion läßt sich statt für den Kreis *K* für

jeden nichtentarteten Kegelschnitt *C* durchführen. Sie heißt die *Polarit*¨

at bzgl. *C*.

Siehe [Berger], 14.5 und 15.5 oder [Salmon–Fiedler], Kapitel 21.

So wie wir sie hier formuliert haben, betrifft die Dualität Punkte von R2 \ (0 , 0)

und Geraden, die nicht durch (0 , 0) gehen. In der projektiven Geometrie bettet man

R2 in eine größere Menge P2(R), die projektive Ebene“, ein, die aus R2 durch Hin-

”

zufügen einer unendlich fernen Geraden“ entsteht. Die Dualität läßt sich erweitern

”

zu einer Dualität zwischen Punkten und Geraden der projektiven Ebene. Das Duale

des Punktes (0 , 0) ist dabei die unendlich ferne Gerade“, und dual zu den Punkten

”

der unendlich fernen Geraden“ sind die Geraden durch (0 , 0). Wir nehmen hier die-

”

se Einbettung von R2 in die projektive Ebene nicht vor und arbeiten statt dessen

weiter mit der oben definierten Dualität zwischen Punkten von R2 \ (0 , 0) und

Geraden, die nicht durch (0 , 0) gehen. Für eine Diskussion der Dualität in der pro-

jektiven Geometrie siehe Abschnitt 4.7.6 oder [Berger] 14.5, [Brieskorn–Knörrer] 6.2,

[Fischer].

Lemma 80 ermöglicht es, aus Sätzen über Punkte und Geraden in R2 durch Dua-

”

lisieren“ neue Sätze über Punkte und Geraden in der Ebene zu gewinnen. Betrachten

wir zum Beispiel den Satz von Pappos (Satz 4.12). Er besagt (unter anderem) das

Folgende:

Seien l 1, l 2 Geraden in R2, $\mathbf{p}(1)$, $\mathbf{p}(3)$, $\mathbf{p}(5) \in l$ 1 und $\mathbf{p}(2)$, $\mathbf{p}(4)$, $\mathbf{p}(6) \in l$ 2

verschiedene Punkte. Mit gj bezeichnen wir die Verbindungsgerade von

$\mathbf{p}(j)$ und $\mathbf{p}(j+1)$ ($\mathbf{p}(7) := \mathbf{p}(1)$). Wir nehmen ferner an, daß sich gj und

$gj+3$ in einem Punkt $\mathbf{q}(j)$ schneiden. Dann liegen $\mathbf{q}(1)$, $\mathbf{q}(2)$ und $\mathbf{q}(3)$ auf

einer Geraden.

Nehmen wir nun an, es läge eine Konfiguration von Punkten und Geraden wie

im Satz von Pappos vor, so daß alle vorkommenden Punkte von (0 , 0) verschieden

sind und alle vorkommenden Geraden nicht durch (0 , 0) gehen. Dual zu l 1 und l 2

sind dann zwei Punkte $l*$, $l*$. Die zu **p**(1), . . . , **p**(6) dualen Geraden **p**(1) $*$, . . . , 1

2

p(6) $*$ haben dann die Eigenschaft, daß **p**(1) $*$, **p**(3) $*$, **p**(5) $*$ durch den Punkt $l*$ und 1

p(2) $*$, **p**(4) $*$, **p**(6) $*$ durch den Punkt $l*$ gehen. Die zu g

sind die

2

j dualen Punkte $g*$

j

Schnittpunkte der Geraden **p**(j) $*$ und **p**(j+1) $*$.

q(j) $*$ ist dann die Verbindungsgerade von $g*$ und $g*$

. Der Satz von Pappos

j

j+3

impliziert zusammen mit Lemma 80, daß sich die drei Geraden **q**(1) $*$, **q**(2) $*$, **q**(3) $*$ in

einem Punkt treffen.

Diese Überlegungen führen uns zu

4.6 Dualität

223

g *

6

p(3)*

g *

5

q(2)*

p(2)*

q(1)*

g *

l *

p(4)*

3

2

g *

4

p(6)*

g *

2

g *

1

p(5)*

q(3)*

l *

1

p(1)*

Bild 4.44

Satz 4.14 *Seien h* 1 *, . . . , h* 6 *verschiedene Geraden in* R2 *, so daß sich h* 1 *, h* 3 *, h* 5 *in einem Punkt treffen oder parallel sind, und so daß sich h* 2 *, h* 4 *, h* 6 *in einem Punkt*

treffen oder parallel sind. Wir nehmen an, daß sich hj und hj+1 *in einem Punkt*

s(*j*) *schneiden* (*h* 7 := *h* 1) . *Dann schneiden sich die Verbindungsgeraden k* 1 *von s*(1) *und s*(4) *, k* 2 *von s*(2) *und s*(5) *, und k* 3 *von s*(3) *und s*(6) *in einem Punkt oder sind parallel.*

Beweis von Satz 4.14 aus dem Satz von Pappos:

Der Beweis besteht im

Grunde darin, die Argumente, die zu Satz 4.14 geführt haben, umgekehrt zu durch-

laufen. Indem wir eventuell zunächst eine Translation durchführen, können wir an-

nehmen, daß die Geraden *h* 1, . . . , *h* 6, *k* 1, *k* 2, *k* 3 alle in *G* liegen. Die Voraussetzung impliziert, daß es Geraden *l* 1, *l* 2 gibt, so daß die Punkte *h*∗, *h*∗, *h*∗ auf *l*

1

3

5

1 und die

Punkte $h*$, $h*$, $h*$ auf l

2

4

6

2 liegen. Falls sich h 1, h 3, h 5 in einem Punkt treffen, so ist

l 1 die zu diesem Punkt duale Gerade, und falls h 1, h 3, h 5 parallel sind, so liegen $h*$, 1

$h*$, $h*$ nach Lemma 81 auf einer Geraden durch (0 , 0).

3

5

Die Geraden $s(j)*$ sind die Verbindungsgeraden von $h*$ und $h*$

, und die Punkte

j

j+1

$k*$ sind die Schnittpunkte der Geraden $s(j)*$ und $s(j+1)*$. Nach dem Satz von Pappos j

liegen $k*$, $k*$, $k*$ auf einer Geraden l. Falls $l \in G$, so schneiden sich k

1

2

3

1, k 2, k 3 im

Punkt $l*$. Falls l durch (0 , 0) geht, so sind nach Lemma 81 die Geraden k 1, k 2 und

k 3 parallel.

✷

Die Dualität läßt sich auf Kegelschnitte erweitern. Dazu führen wir zunächst zwei

Bezeichnungsweisen ein.

Ist C eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel und $\mathbf{y} \in C$, so bezeichnen wir die

Tangentialgerade an C in $\mathbf{y}$ mit $t\mathbf{y}(C)$, oder auch kurz mit $t\mathbf{y}$, wenn klar ist, von welchem Kegelschnitt C die Rede ist. Ferner sei C 0 die Menge aller Punkte $\mathbf{y}$ von

C, für die die Tangentialgerade $t\mathbf{y}(C)$ nicht durch (0 , 0) geht, das heißt

$C\,0 = \mathbf{y} \in C\ t\mathbf{y}(C) \in G\}$.

Nach Proposition 72 gibt es von (0 , 0) aus höchstens zwei Tangentialgeraden an C,

also besteht $C \setminus C\,0$ aus höchstens zwei Punkten.

Proposition 82 *Sei C eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel. Dann gibt es einen ein-*

deutig bestimmten Kegelschnitt C∗, so daß f¨

ur alle $\mathbf{y} \in C\,0$

$t\mathbf{y}(C)^* \in C^*$.

C^* heißt der zu C duale *Kegelschnitt. Er ist wieder eine Ellipse, Parabel oder Hy-*

perbel, jedoch kann beispielsweise der duale Kegelschnitt einer Ellipse eine Parabel

oder Hyperbel sein. Ferner gilt

$C^{**} = C$,

und

1) $t\mathbf{y}(C)^* \in (C^*)0$ *für alle* $\mathbf{y} \in C\,0$,

2) die Abbildung $\mathbf{y} \to t\mathbf{y}(C)^*$ *ist eine Bijektion zwischen* $C\,0$ *und* $(C^*)0$ *, 3) f¨*

ur alle $\mathbf{y} \in C\,0$ *ist die Gerade* $\mathbf{y}^*$ *die Tangentialgerade an* C^* *im Punkt* $t\mathbf{y}(C)^*$.

Beweis

Sei

$C = (x\,1, x\,2) \in$ R2 $a\,11\,x\,2 + 2\,a$

$+ 2\,b$

1

$12\,x\,1\,x\,2 + a\,22\,x\,2$

2

$1\,x\,1 + 2\,b\,2\,x\,2 + c = 0$

(Beachten Sie den Faktor 2 vor b 1 und b 2!) Setze

a

$a* := \det$

22

$b\ 2 = ca$

11

b

$22 - b\ 2$

2

2

c

a

$a* := -\det$

12

$b\ 2 = b$

12

b

$1\ b\ 2 - ca\ 12$

1

c

a

$a* := \det$

11

$b\ 1 = ca$

22

b

$11 - b\ 2$

1

1

c

a

$b* := \det$

12

$a\ 22 = b$

1

b

$2\ a\ 12 - b\ 1\ a\ 22$

1

$b\ 2$

a

$b* := -\det$

11

$a\ 12 = b$

2

b

$1\ a\ 12 - b\ 2\ a\ 11$

1

$b\ 2$

a

$c* := \det$

11

$a\ 12 = a$

a

$11\ a\ 22 - a\ 2$

12

12

$a\ 22$

und

.

.

.

.

.

.

.

4.6 Dualität

225

$C* := (\ x\ 1\ ,x\ 2) \in \mathrm{R}2\ a*\ x\ 2 + 2\ a*\ x$

x 2 + 2 $b*x$

x

11 1

12 1 x 2 + $a*$

22 2

1 1 + 2 $b*$

2 2 + $c*$ = 0(4.17)

Ist **y** ∈ C, so ist nach Korollar 70

t**y**(C) = (x 1 ,x 2) ∈ R2 2(a 11 y 1 + a 12 y 2 + b 1) x 1 + 2(a 12 y 1 + a 22 y 2 + b 2) x 2

+ 2(b 1 y 1 + b 2 y 2 + c) = 0

Geht t**y**(C) nicht durch (0 , 0), so ist b 1 y 1 + b 2 y 2 + c = 0. Für **y** ∈ C 0 ist also a

a

t

11 y 1 + a 12 y 2 + b 1

12 y 1 + a 22 y 2 + b 2

y(C) =

(x 1 ,x 2) ∈ R2

x

x

b

1 +

2 + 1 = 0

,

1 y 1 + b 2 y 2 + c

b 1 y 1 + b 2 y 2 + c

das heißt

a

a

$t*$

11 y 1 + a 12 y 2 + b 1

12 y 1 + a 22 y 2 + b 2

y =

,

(4.18)

b 1 y 1 + b 2 y 2 + c

b 1 y 1 + b 2 y 2 + c

Als erstes prüfen wir nach, daß $t*$**y** in diesem Fall auf $C*$ liegt. Dazu setzen wir die

Koordinaten von $t*$**y** in die Gleichung von $C*$ ein (ein eleganteres Argument skizzieren

wir unten in Bemerkung 83). Es ergibt sich

1

$a* (a$

$(a$

$(b$

11

$11 y 1 + a 12 y 2 + b 1)2 + a*$

22

$12 y 1 + a 22 y 2 + b 2)2$

$1 y 1 + b 2 y 2 + c)2$

$+ 2 a* (a$

12

$11 y 1 + a 12 y 2 + b 1)(a 12 y 1 + a 22 y 2 + b 2)$

$+ 2 b*(a$

1

$11 y 1 + a 12 y 2 + b 1)(b 1 y 1 + b 2 y 2 + c)$

$+ 2 b*(a$

2

$12 y 1 + a 22 y 2 + b 2)(b 1 y 1 + b 2 y 2 + c) + c*(b 1 y 1 + b 2 y 2 + c)2$

1

$= (b 1 y 1 + b 2 y 2 + c)2$

$(a 11 y 1 + a 12 y 2 + b 1)$

$\cdot a* (a$

(a

(b

11

11 y 1 + a 12 y 2 + b 1) + a∗

12

12 y 1 + a 22 y 2 + b 2) + b∗

1

1 y 1 + b 2 y 2 + c)

+ (a 12 y 1 + a 22 y 2 + b 2)

· a∗ (a

(a

(b

12

11 y 1 + a 12 y 2 + b 1) + a∗

22

12 y 1 + a 22 y 2 + b 2) + b∗

2

1 y 1 + b 2 y 2 + c)

+ (b 1 y 1 + b 2 y 2 + c)

· b∗(a

(a

1

11 y 1 + a 12 y 2 + b 1) + b∗

2

12 y 1 + a 22 y 2 + b 2) + c∗(b 1 y 1 + b 2 y 2 + c)

Setze

D := a 11 a 22 c + 2 a 12 b 1 b 2 − a 11 b 2 − a

− a 2 c.

2

22 b 2

1

12

Dann ist D = 0 (vgl. die vorletzte Übung am Ende von Abschnitt 4.1). Ferner ist, wie man leicht nachrechnet

a∗ (a

(a

(b

11

11 y 1 + a 12 y 2 + b 1) + a∗

12

12 y 1 + a 22 y 2 + b 2) + b∗

1

$1\,y\,1 + b\,2\,y\,2 + c) = Dy\,1$

$a* (\,a$

$(\,a$

$(\,b$

12

$11\,y\,1 + a\,12\,y\,2 + b\,1) + a*$

22

$12\,y\,1 + a\,22\,y\,2 + b\,2) + b*$

2

$1\,y\,1 + b\,2\,y\,2 + c) = Dy\,2$

$b*(\,a$

$(\,a$

1

$11\,y\,1 + a\,12\,y\,2 + b\,1) + b*$

2

$12\,y\,1 + a\,22\,y\,2 + b\,2) + c*(\,b\,1\,y\,1 + b\,2\,y\,2 + c) = D$

.

.

.

.

Folglich ist der Ausdruck, der sich durch Einsetzen der Koordinaten von $t\mathbf{y}$ in

die

Gleichung von $C*$ ergibt, gleich

D

$(a$

$(b$

$11\ y\ 1 + a\ 12\ y\ 2 + b\ 1)\ y\ 1 +(a\ 12\ y\ 1 + a\ 22\ y\ 2 + b\ 2)\ y\ 2 +(b\ 1\ y\ 1 + b\ 2\ y\ 2 + c)\ 1\ y\ 1 + b\ 2\ y\ 2 + c)2$

D

$=$

$\{(a$

$+ 2\ a$

$+ 2\ b$

$(b$

$11\ y\ 2$

1

$12\ y\ 1\ y\ 2 + a\ 22\ y\ 2$

2

$1\ y\ 1 + 2\ b\ 2\ y\ 2 + c)\ \} = 0$.

$1\ y\ 1 + b\ 2\ y\ 2 + c)2$

Damit ist gezeigt, daß $t*\mathbf{y} \in C*$. $C*$ ist kein Geradenpaar und keine Doppelgerade,

denn sonst gingen unendlich viele der Tangentialgeraden $t\mathbf{y}$ durch einen Punkt

(dual

zu einer Geraden, die in $C*$ enthalten ist), im Widerspruch zu Proposition 72. Ebenso

ist $C*$ kein Einsiedlerpunkt.

Nach der Klassifikation von Kegelschnitten aus Satz 4.1 ist $C*$ also eine Ellipse,

Parabel oder Hyperbel.

Die Tangentialgerade an $C*$ im Punkt $t*\mathbf{y}$ ist nach (4.18) und Korollar 70

$tt*$ ($C*$) =

(x

y

1 ,x 2) ∈ R2

$a*$ (a

(a

(b

11

11 y 1 + a 12 y 2 + b 1) + $a*$

12

12 y 1 + a 22 y 2 + b 2) + $b*$

1

1 y 1 + b 2 y 2 + c) x 1

+ $a*$ (a

(a

(b

12

11 y 1 + a 12 y 2 + b 1) + a∗

22

12 y 1 + a 22 y 2 + b 2) + b∗

2

1 y 1 + b 2 y 2 + c) x 2

+ b∗(a

(a

1

11 y 1 + a 12 y 2 + b 1) + b∗

2

12 y 1 + a 22 y 2 + b 2) + c∗(b 1 y 1 + b 2 y 2 + c)

= 0

also gleich

D

(x 1 ,x 2) ∈ R2

(y

b

1 x 1 + y 2 x 2 + 1) = 0

1 y 1 + b 2 y 2 + c

Da $D/(b\ 1\ y\ 1 + b\ 2\ y\ 2 + c) = 0$, ist die Tangentialgerade an $C*$ im Punkt $t*\mathbf{y}$ gleich $\mathbf{y}\ *$.

Insbesondere liegt sie in G, d.h. $t*\mathbf{y} \in (C*)0$. Dies zeigt, daß die Abbildung

$C\ 0 \to (C*)0;$

$\mathbf{y} \to t\mathbf{y}(C)\ *$

die Abbildung

$(C*)0 \to C\ 0;$

$\mathbf{z} \to t\mathbf{z}\ C*\ *$

als Umkehrabbildung hat, und insbesondere bijektiv ist. Da sich $C*$ von $(C*)0$ um

höchstens zwei Punkte unterscheidet, folgt daraus auch, daß $C*$ durch C eindeutig

bestimmt ist. Damit ist Proposition 82 bewiesen.

✷

Bemerkung 83 Setzt man im Beweis von Proposition 82

⎛

⎝

a 11 a 12 b 1

$A := ⎝\ a$

⎠

12

a 22 b 2

b 1

b 2

c

.

4.6 Dualität

227

so ist

⎧

⎛ ⎞

⎛ ⎞

⎫

⎨

x 1

x 1

⎬

C =

⎝ ⎠ · ⎝ ⎠

⎩(x 1 ,x 2) ∈ R2

x 2

A

x 2

= 0⎭

1

1

und D = det A. Die Matrix

⎛

⎝

$a*$

$a*$

$b*$

11

12

1

$A*$ = ⎝ $a*$

$a*$

$b*$⎠

12

22

2

$b*$

$b*$

$c*$

1

2

hat die Eigenschaft, daß

⎛

⎝

1

0

0

$A* \circ A = A \circ A* = (\det A) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

0

0

1

Ferner ist

⎡

⎛ ⎝ ⎛

⎛ ⎝⎝

⎤

⎨

x 1

x 1

⎬

$C* =$

⎝ ⎠ · ⎝

⎝ ⎠⎠

⎩(x 1 ,x 2) ∈ R2

x 2

$A*$ ∘

x 2

= 0⎭

1

1

Für **y** ∈ C ist

⎧

⎛ ⎝ ⎛

⎛ ⎝⎝

⎫

⎨

x 1

y 1

⎬

t**y** =

⎝ ⎠ · ⎝

⎝ ⎠⎠

⎩(x 1 ,x 2) ∈ R2

x 2

A ◦

y 2

= 0⎭ .

1

1

Sind also (z 1 ,z 2) die Koordinaten von t∗**y**, so ist

⎛ ⎞

⎛ ⎞

z 1

y 1

⎝ z ⎠

⎝ ⎠

2

ein Vielfaches von

A ◦

y 2

1

1

Mit dieser Schreibweise ist der Beweis, daß $t*\mathbf{y} \in C*$ ist, relativ einfach, denn

$\left(\right.$

$\left(\right.\ \left.\right)\left.\right)$

$\left(\right.$

$\left(\right.\ \left.\right)\left.\right)$

$\left(\right.$

$\left(\right.\ \left.\right)\left.\right)\ \left(\right.$

$\left(\right.\ \left.\right)\left.\right)$

y 1

y 1

y 1

y 1

$\left(\right.\ A \circ \left(\right.\ y\ \left.\right)\left.\right)$

$\left(\right.$

$\left(\right.\ \left.\right)\left.\right)$

$\left(\right.$

$\left(\right.\ \left.\right)\left.\right)\ \left(\right.$

$\left(\right.\ \left.\right)\left.\right)$

2

$\cdot\ A* \circ A \circ y$ 2

=

$A \circ$

y 2

$\cdot$ ($A* \circ A$) $\circ$ y 2

1

1

1

1

⎛

⎛ ⎞⎞ ⎛ ⎞

y 1

y 1

= (det A) $\cdot$ ⎝ $A \circ$ ⎝ y ⎠⎠ ⎝ ⎠

2

$\cdot$ y 2

1

1

⎛ ⎞ ⎛

⎛ ⎞⎞

y 1

y 1

= (det A) · ⎝ y ⎠ ⎝

⎝ ⎠⎠

2

· A · y 2

1

1

= 0

Ebenso vereinfachen sich die anderen Schritte des Beweises von Proposition 82.

.

Bei der Dualität zwischen Kegelschnitten entspricht Proposition 66, die besagt,

daß eine Gerade einen Kegelschnitt in höchstens zwei Punkten schneidet, Proposi-

tion 72, die besagt, daß es von einem Punkt aus höchstens zwei Tangentialgeraden

an einen vorgegebenen Kegelschnitt gibt. Wir zeigen hier, wie man mit Hilfe der

Dualität Proposition 72 aus Proposition 66 herleiten kann:

Sei also C eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel und **y** ein Punkt von R2. Wir

nehmen an, es gäbe drei verschiedene Geraden l 1, l 2, l 3 durch **y**, die an C tangential

sind. Indem wir – falls nötig – eine Translation durchführen, können wir annehmen,

daß l 1, l 2, l 3 nicht durch (0 , 0) gehen. Dann trifft nach Proposition 82 die Gerade **y** ∗

den dualen Kegelschnitt C∗ in den Punkten l∗, l∗ und l∗. Da C∗ wieder eine Ellipse,

1

2

3

Parabel oder Hyperbel ist, ergibt sich ein Widerspruch zu Proposition 66.

✷

Auf ähnliche Weise kann man auch Proposition 66 aus Proposition 72 folgern.

Wie angekündigt, zeigen wir nun

Proposition 84 *Der Satz von Brianchon impliziert den Satz von Pascal f¨*

ur Ellip-

sen, Parabeln und Hyperbeln.

Beweis Sei C eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, und seien **p**(1), . . . , **p**(6) Punkte

von C, für die die Voraussetzungen von Satz 4.11 erfüllt sind. Das heißt

p(j) = **p**(j+1)

mit **p**(7) := **p**(1)

und für die Verbindungsgeraden gj von **p**(j) und **p**(j+1) gilt

$gj = gj+3$

für j = 1, 2, 3.

Indem wir eventuell eine Translation durchführen, können wir annehmen, daß

$\mathbf{p}(1), \ldots, \mathbf{p}(6) \in C\,0$

und

$g\,1, \ldots, g\,6 \in G.$

Seien

$\mathbf{y}(j) := t\mathbf{p}(j)(C)*$

die Punkte des dualen Kegelschnitts $C*$, die dual zu den Tangentialgeraden $t\mathbf{p}(j)(C)$

an C in $\mathbf{p}(j)$ sind. Nach Proposition 82 ist $\mathbf{p}(j)*$ die Tangentialgerade an $C*$ im Punkt $\mathbf{y}(j)$. Die Geraden $\mathbf{p}(j)*$ und $\mathbf{p}(j+1)*$ schneiden sich nach Lemma 80 im Punkt $g*$.

j

Mit lj bezeichnen wir die Verbindungsgerade von $g*$ und $g*$

. Nach dem Satz

j

$j+3$

von Brianchon (4.13) gehen $l\,1$, $l\,2$, $l\,3$ durch einen Punkt $\mathbf{z}$ oder sind alle drei parallel.

1. Fall : $l\,1$, $l\,2$, $l\,3$ gehen alle drei nicht durch (0 , 0). In diesem Fall schneiden sich gj und $gj+3$ im Punkt $\mathbf{q}(j) := l*$. Falls l

j

1, $l\,2$, $l\,3$ durch einen Punkt $\mathbf{z}$ gehen, so liegen nach

Lemma 80 die Punkte $\mathbf{q}(1)$, $\mathbf{q}(2)$, $\mathbf{q}(3)$ auf der Geraden $\mathbf{z}*$, und der Satz von Pascal

ist bewiesen. Falls l 1, l 2, l 3 parallel sind, so liegen nach Lemma 81 die Punkte **q**(1),

q(2), **q**(3) auf einer Geraden durch (0 , 0); und wieder ist die Behauptung bewiesen.

.

2. Fall : Genau eine der drei Geraden l 1, l 2, l 3 geht durch (0 , 0). Wir können anneh-

men, daß dies die Gerade l 1 ist. Dann ist nach Lemma 81 die Gerade g 1 parallel

zur Geraden g 4, während sich g 2 und g 5 in **q**(2) := $l*$ und g

2

3 und g 6 in **q**(3) := $l*$

3

schneiden. Schneiden sich l 1, l 2, l 3 in einem Punkt **z**, so sind nach Lemma 81 die

Geraden g 1, g 4 und **z** $*$ parallel. **z** $*$ ist aber die Verbindungsgerade von **q**(2) = $l*$ und 2

q(3) = $l*$, also ergibt sich wieder die Behauptung des Satzes von Pascal. Sind l

3

1, l 2,

l 3 parallel, so liegen **q**(2) und **q**(3) auf einer Geraden h durch (0 , 0). Die Gerade h

schneidet g 1 nicht, denn dual zu einem Schnittpunkt **x** wäre eine Gerade **x** $* \in$

G

durch $g*$, die zu l

1

2 und l 3 parallel wäre. Dann wäre $\mathbf{x} * = l$ 1, läge also nicht in *G*.

Ebenso zeigt man, daß h parallel zu g 4 ist.

3. Fall : Mindestens zwei der Geraden l 1, l 2, l 3 gehen durch (0 , 0). Dann sind g 1 und g 4, g 2 und g 5, und g 3 und g 6 jeweils parallel.

✷

Mit Proposition 84 haben wir gezeigt, daß alle in Abschnitt 4.5 gemachten Aussa-

gen aus dem Satz von Brianchon folgen. In der Tat: Wie wir gerade gesehen haben,

impliziert nach Proposition 78 und Proposition 79 der Satz von Pascal für nichtent-

artete Kegelschnitte den Satz von Pappos. Der Satz von Pappos ist der nichttriviale

Fall des Satzes von Pascal für Geradenpaare (vgl. die Diskussion vor Satz 4.12) also

ergibt sich der Satz von Pascal im Allgemeinen. Den Satz von Brianchon werden wir

im nächsten Kapital unter Verwendung der Geometrie im Raum beweisen.

¨

Ubung: Formulieren Sie Verallgemeinerungen des Satzes 4.14 in denen zugelassen

wird, daß die Geraden hj und hj+1 parallel sind, und folgern Sie diese

Verallgemei-

nerungen aus dem Satz von Pappos!

..

Ubung:

i) Seien h 1, . . . , h 6 paarweise verschiedene Geraden in R2, so daß sich h 1, h 3, h 5

in einem Punkt **t** g und h 2, h 4, h 6 in einem Punkt **t** u treffen. Ferner sei **s**(j) der Schnittpunkt von hj und hj+1. Setze

p(1) := **s**(1) ,

p(2) := **s**(4) ,

p(3) := **t** g

p(4) := **s**(5) ,

p(5) := **s**(2) ,

p(6) := **t** u.

Zeigen Sie, daß für die Punkte **p**(1), . . . , **p**(6) die Voraussetzungen des Satzes

von Pappos erfüllt sind!

ii) Verwenden Sie (i), um Satz 4.14 ohne Verwendung der Dualität aus dem Satz

von Pappos herzuleiten!

..

Ubung: Geben Sie je ein Beispiel einer Ellipse C an, für die $C*$ eine Ellipse, eine

Parabel bzw. eine Hyperbel ist! (Hinweis: Legen Sie die Ellipse C so, daß (0 , 0) im

Inneren, auf, oder außerhalb von *C* liegt!)

¨

Ubung: Beweisen Sie Lemma 77 mit Hilfe der Dualität!

¨

Ubung: Zeigen Sie, daß zwei voneinander verschiedene nichtentartete Kegelschnitte

höchstens vier gemeinsame Tangentialgeraden haben!

.
.
.
.
.

4.7

Erg¨

anzungen zu Kapitel 4

4.7.1

Gleichungen von Kegelschnitten in Polarkoordinaten

In vielen Zusammenhängen ist es nützlich, die Gleichungen von Kegelschnitten in

Polarkoordinaten zu kennen (siehe z.B. Abschnitt 4.7.2). Die *Polarkoordinaten* eines

Punktes (x_1 ,x_2) ∈ R2 sind definiert als

r

=

x 2 + x 2

1

2

x

ϕ

=

arccos

1

x 2 + x 2

1

2

falls (x 1 ,x 2) = (0 , 0), und

$r = \phi = 0$

falls (x 1 ,x 2) = (0 , 0). r ist der Abstand des Punktes (x 1 ,x 2) vom Koordinatenursprung, und ϕ ist der Winkel zwischen der positiven x 1-Achse und dem Strahl von

(0 , 0) aus in Richtung des Punktes (x 1 ,x 2).

x 2

x = r sinϕ

(x ,x)

2

1

2

r

ϕ

0

x

x = r cos

1

ϕ

1

Bild 4.45

Die cartesischen Koordinaten x_1, x_2 ergeben sich aus den Polarkoordinaten nach der

Regel

$x_1 = r \cos \phi$

$x_2 = r \sin \phi$

Im folgenden Satz wollen wir Gleichungen für Kegelschnitte in Polarkoordinaten

angeben. Dazu bezeichnen wir für $\varepsilon \geq 0, \delta > 0$ und $\phi_0 \in [0, 2\pi]$ mit $K(\varepsilon, \delta, \phi_0)$ die Menge aller Punkte in R2, deren Polarkoordinaten die Gleichung

δ

$r = 1 - \varepsilon \cos(\phi - \phi_0)$

erfüllen.

.
.
.
.
.
.
.

4.7 Ergänzungen zu Kapitel 4

231

Satz 4.15 *(i) F¨*

ur jedes $\varepsilon \geq 0$,$\delta > 0$,$\phi\ 0 \in [0\ ,\ 2\ \pi]$ *ist* $K(\ \varepsilon,\delta,\phi\ 0)$ *ein Kegelschnitt mit* $(0\ ,\ 0)$ *als Brennpunkt. Er ist*

eine Ellipse, falls $\varepsilon < 1$,

eine Parabel, falls $\varepsilon = 1$ *und*

eine Hyperbel, falls $\varepsilon > 1$.

(ii) Jede Ellipse, Parabel, oder Hyperbel mit $(0\ ,\ 0)$ *als Brennpunkt ist von der Form*

$K(\ \varepsilon,\delta,\phi\ 0)$ *mit geeignetem* $\varepsilon \geq 0$,$\delta > 0$,$\phi\ 0 \in [0\ ,\ 2\ \pi]$.

Beweis Die Drehung um $(0\ ,\ 0)$ mit Winkel $\phi\ 0$ führt $K(\ \varepsilon,\delta,\phi\ 0)$ in $K(\ \varepsilon,\delta,\ 0)$ über. Da diese Drehung Ellipsen, Parabeln oder Hyperbeln mit Brennpunkt $(0\ ,\ 0)$ wieder in

Ellipsen, Parabeln oder Hyperbeln mit Brennpunkt $(0\ ,\ 0)$ überführt, genügt es, den

Satz für $\phi\ 0 = 0$ und für Kegelschnitte, die die $x\ 1$-Achse als Symmetrieachse haben,

zu zeigen.

Betrachten wir zunächst eine Ellipse, die (0 , 0) als einen Brennpunkt und einen Punkt

(f, 0) mit $f > 0$ als anderen Brennpunkt hat. Dann gibt es $\rho > 1$ f , so daß die Ellipse

2

gerade die Menge der Punkte **x** ist, für die die Summe der Abstände von **x** zu (0 , 0)

und von **x** zu (f, 0) gleich 2 ρ ist. Sind r und ϕ die Polarkoordinaten von **x** = (x 1 ,x 2), so ist der Abstand von (0 , 0) zu **x** gleich r, während der Abstand von (f, 0) zu **x**

gleich

x 2 + (x

+ x 2 − 2 x

2

1 − f)2 =

x 22

1

1 f + f 2 =

r 2 − 2 f r cos ϕ + f 2

ist.

x = (x1, x2)

r

x2

(0,0)

x

(f,0)

1

f-x1

Bild 4.46

Die Gleichung der Ellipse ist also

$r +$

$r\,2 - 2\,f\,r \cos\phi + f\,2 = 2\,\rho$

Successive äquivalente Umformungen ergeben

$r\,2 - 2\,f\,r \cos\phi + f\,2 = 2\,\rho - r$

$r\,2 - 2\,f\,r \cos\phi + f\,2$

$=$

$4\,\rho\,2 - 4\,\rho r + r\,2$ und $r \leq 2\,\rho$

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

4 Kegelschnitte

$4\rho 2 - f 2$

r

$=$

und $r \leq 2\rho$

$4\rho - 2f \cos\phi$

$(2\rho + f)(2\rho - f)$

r

$=$

und $r \leq 2\rho$

$2(2\rho - f \cos\phi)$

Da $f < 2\rho$, impliziert die erste Gleichung in der letzten Zeile die Ungleichung $r \leq 2\rho$.

Die Gleichung der Ellipse ist also

δ

$r = 1 - \varepsilon \cos\phi$

mit

$(2\rho + f)(2\rho - f)$

f

$\delta =$

,

$\varepsilon =$

4ρ

2ρ

Man sieht, daß alle Werte von $\delta > 0$ und $0 \leq \varepsilon < 1$ auftreten, wenn f und ρ alle

Zahlen mit $f \geq 0$ und $\rho > 1\ f$ durchlaufen.

2

Für eine Hyperbel mit Brennpunkten in (0 , 0) und ($-f$, 0) $f > 0$, die dadurch cha-

rakterisiert ist, daß die Differenz der Abstände zu den Brennpunkten betragsmäßig

gleich $2\rho < f$ ist, ergibt eine ähnliche Rechnung die Gleichung in Polarkoordinaten

δ

$r = 1 - \varepsilon \cos \phi$

mit

$(f + 2\rho)(f - 2\rho)$

f

$\delta =$

,

$\varepsilon =$

4ρ

2ρ

Wieder sieht man, daß alle Werte von $\delta > 0$ und $\varepsilon > 1$ auftreten, wenn f und ρ alle

Zahlen mit $f \geq 0$ und $\rho < 1$ f durchlaufen.

2

Schließlich betrachten wir eine Parabel mit Brennpunkt (0 , 0) und Brenngerade

$(x_1, x_2) \in R^2$

$x_1 = -a$

$, a > 0$. In diesem Fall ist die Gleichung in Polar-

koordinaten

$r = r \cos \phi + a$

oder

δ

$r = 1 - \varepsilon \cos \phi$

mit

$\delta = a$

,

$\varepsilon = 1$

Damit ist Teil (ii) des Satzes bewiesen. Teil (i) folgt daraus, daß alle möglichen

Werte von δ und ε in den obigen Konstruktionen vorgekommen sind.

✷

.

.

.

a

r cosϕ

(x1, x2)

r

(0,0)

Brenngerade

Bild 4.47

4.7.2

Kepler’sche Ellipsen

Basierend auf jahrelangen Beobachtungen formulierte Johannes Kepler im Jahre

1609 das folgende Gesetz über die Bewegung eines Planeten um die Sonne (erstes

„

Kepler’sches Gesetz“): *Der Planet beschreibt eine Ellipse, in deren einem Brenn-*

punkt die Sonne steht.

Knapp hundert Jahre später entwickelte Isaac Newton eine Theorie der Gravitation.

Einer der großen Erfolge der Newton’schen Theorie war, daß sich das erste Kep-

ler’sche Gesetz - und viele andere Gesetze, die Kepler formuliert hatte - aus einigen

wenigen Grundannahmen über Kraftgesetze ableiten ließ (siehe [Kline] 17.3). Wir

geben hier eine Ableitung des ersten Kepler’schen Gesetzes aus den Newton’schen

Gesetzen (siehe auch [Sommerfeld], Kap. 6). Der Einfachheit halber nehmen wir an,

daß die Sonne im Koordinatenursprung ruht, und daß der Planet ein Massenpunkt

der Masse m ist, der sich in der x_1, x_2-Ebene bewegt. Nach den Newton’schen Ge-

setzen ist die Kraft F, die auf den Planeten an der Stelle $\mathbf{x} = (x_1, x_2, 0)$ ausgeübt

wird, gleich

$$F = -G \frac{mM}{r^2} \frac{\mathbf{x}}{r}$$

Hier bezeichnet M die Masse der Sonne, $r := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, und G ist die Gravitations-

konstante. Nach den Newton’schen Bewegungsgleichungen bewegt sich der Planet

auf einer Bahn $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), 0)$, für die gilt

$$mM \mathbf{x}$$

$m\ddot{\mathbf{x}} = -G\frac{r}{r^2}$

oder

$M\ddot{\mathbf{x}} = -G\frac{\mathbf{x}}{r^3}$ (4.19)

Hier bezeichnet $\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}$ usw.. Aus dieser Gleichung folgt

.

.

.

d ($m\mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}}$) = $m\,\dot{\mathbf{x}} \times \dot{\mathbf{x}} + m\mathbf{x} \times \ddot{\mathbf{x}}$

dt

GM

=

$\mathbf{0} - m\mathbf{x} \times$

$\mathbf{x} = \mathbf{0}$

r 3

nach Satz 2.2. Offenbar ist $m\mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}}$ ein Vektor in x 3-Richtung. Die obige Gleichung

impliziert, daß er konstant ist.

..

Ubung: Verwenden Sie dies, um zu zeigen, daß der Planet in der x 1 ,x 2-Ebene bleibt,

wenn sein Anfangspunkt und seine Anfangsgeschwindigkeit in dieser Ebene liegen!

(Das haben wir in der obigen Diskussion aus Symmetriegründen als offensichtlich

angenommen.)

Wir bezeichnen mit L die x 3-Komponente des Vektors $m\mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}}$. Dies ist der Dre-

himpuls des Planeten um die x 3-Achse. Also gilt

$m(x 1 \dot{} x 2 - x 2 \dot{} x 1) = L$

oder in Polarkoordinaten

$mr 2 \dot{}$

$\phi = L$

(4.20)

¨

Ubung: Leiten Sie daraus das zweite Kepler'sche Gesetz: Der Radiusvektor von der

„

Sonne nach dem Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen" her!

Falls $L = 0$, bewegt sich der Planet auf einer Geraden auf die Sonne zu, und das

führt zur Katastrophe. Wir betrachten deshalb nun den Fall $L = 0$. Drückt man die

rechte Seite der Bewegungsgleichung (4.19) in Polarkoordinaten aus, so ergibt sich

d ˙x1

d ˙x

$= - GM \cos \phi$

,

2

$= - GM \sin \phi$

dt

r 2

dt

r 2

Multiplizieren wir dies mit 1 = 1 , so ergibt sich

d ϕ

.

ϕ

dt

d ˙x1 dt

d ˙x

dt

= − GM cos ϕ

,

2

= − GM sin ϕ

dt d ϕ

r 2 ˙

ϕ

dt d ϕ

r 2 ˙

ϕ

oder, unter Verwendung der Drehimpulsgleichung (4.20)

d ˙x1

d ˙x

$= - GmM \cos \phi$

,

2

$= - GmM \sin \phi$

d ϕ

L

d ϕ

L

Durch Integration ergibt sich daraus

GmM

.

$x\ 1 = - GmM \sin \phi + A$

,

.

x

$\cos \phi + B$

L

2 =

L

mit Integrationskonstanten A,B. Drücken wir $\dot{}$

x 1 und $\dot{}$ x 2 in Polarkoordinaten aus,

so erhalten wir

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

.

4.7 Ergänzungen zu Kapitel 4

$\dot{}$ $r \cos \phi - r$ $\dot{}$

$\phi \sin \phi$

=

$-GmM \sin \phi + A$

L

GmM

$\dot{}$ $r \sin \phi + r$ $\dot{}$

$\phi \cos \phi$

=

cos ϕ + B

L

Nun multiplizieren wir die erste Gleichung mit − sin ϕ, die zweite mit cos ϕ und

addieren die entstehenden Gleichungen. Damit ergibt sich

GmM

r ˙

ϕ =

− A sin ϕ + B cos ϕ

L

Schreibe A = −C sin ϕ 0 , B = −C cos ϕ 0 mit C > 0 , ϕ 0 ∈ [0 , 2 π). Unter nochmali-ger Verwendung von (4.20) ergibt sich

L 1

GmM

=

− C cos(ϕ − ϕ

m r

L

0)

oder

δ

$r = 1 - \varepsilon \cos(\phi - \phi 0)$

mit

$L 2$

LC

$\delta =$

,

$\varepsilon =$

$Gm 2 M$

GmM

Man sieht aus (4.19), daß sich der Massenpunkt auf einem Kegelschnitt mit der

Sonne als Brennpunkt bewegt. Im Falle eines Planeten, der ja die Sonne mehr als

einmal umläuft, kann der Kegelschnitt keine Parabel und keine Hyperbel sein. Somit

ist er eine Ellipse.

✷

Eine geometrische Ableitung der Kepler'schen Gesetze aus dem Newton'schen

Gravitationsgesetz findet sich in "Feynman's verschollener Vorlesung" [Goodstein].

Andere Beweise und weitere Information findet man in [Sommerfeld], ch.6.

4.7.3

Die Dandelin'schen Kugeln

Es sei K der Kreiskegel $\{(x 1 , x 2 , x 3) \in R3 / x 2 = x 2 + x 2 \}$ und E eine

Ebene, die 3

1

2

K längs einer Ellipse C schneidet. Dann gibt es genau zwei Kugeln S 1 , S 2 , die K

längs eines Kreises tangential treffen und auch noch an die Ebene E tangential sind.

Es seien F 1 und F 2 die Berührpunkte von S 1 bzw. S 2 mit E.

Satz 4.16 *(Dandelin 1822)*

F 1 und F 2 sind die Brennpunkte von C.

Beweis Sei P ein Punkt von C. Die Verbindungsgerade g von P mit der Kegelspitze

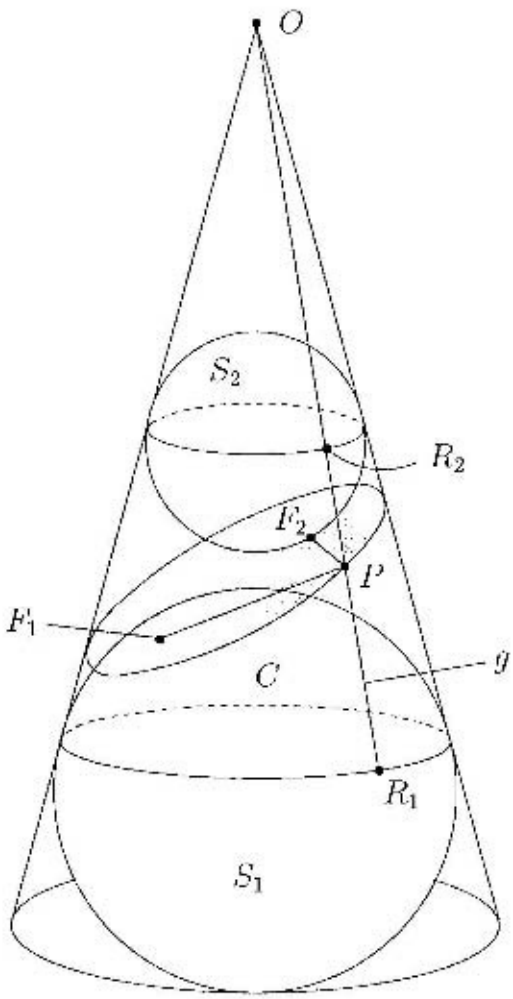
0 trifft die Kreise S 1 ∩ K bzw. S 2 ∩ K jeweils in einem Punkt, den wir R 1 bzw. R 2

nennen(siehe Bild 4.48). Der Abstand zwischen R 1 und R 2 hängt offenbar nicht von

P ab. Deswegen genügt es für den Beweis des Satzes zu zeigen, daß die Summe der

Abstände F 1 P zwischen F 1 und P und F 2 P zwischen F 2 und P gleich dem Abstand R 1 R 2 zwischen R 1 und R 2 ist. Dazu genügt es natürlich zu zeigen, daß

▪



236

4 Kegelschnitte

Bild 4.48

$F1P = R1P$

und

$F\,2\,P = R\,2\,P$

Die Strecken zwischen $P\,F\,1$ und $P\,R\,1$ sind beide Tangenten von P aus an die Kugel

$S\,1$, werden also durch eine geeignete Drehung um die Achse durch P und den Mit-

telpunkt von $S\,1$ ineinander übergeführt. Deswegen ist $F\,1\,P = R\,1\,P$. Ebenso zeigt

man, daß $F\,2\,P = R\,2\,P$.

✷

Der Satz von Dandelin ist wahrscheinlich der eleganteste Weg, die Beschreibung von

Ellipsen als Schnitte eines Kegels und einer Ebene mit der Brennpunkteigenschaft

von Satz 4.2 in Verbindung zu bringen. Analoge Sätze gelten für Parabeln und Hy-

perbeln. So läßt sich die Theorie der Kegelschnitte aus ihrer Definition als Schnitte

von Kegeln mit Ebenen entwickeln (siehe [Jennings] ch.3).

4.7.4

Billiards

Das elliptische Billiard, das wir in Satz 4.10 betrachtet haben, ist Spezialfall einer

allgemeineren Situation. Gegeben sei eine stückweise einmal stetig differenzierbare

geschlossene Kurve *C* in der Ebene R2. Mit Ω bezeichnen wir das Innere von *C*

(siehe Bild 4.49).

Nun betrachten wir die Trajektorien (Bahnkurven) von Punkten, die sich in Ω

geradlinig bewegen und am Rand, das heißt in den Punkten von *C*, nach dem Prinzip

.

C

Ω

Bild 4.49

Einfallswinkel = Ausfallswinkel“ reflektiert werden. Dabei beschränken wir uns auf

”

den Fall, daß die Trajektorien keinen Eckpunkt von *C* treffen. (Man kann zeigen, daß

für jeden Anfangspunkt und fast jede Anfangsrichtung die entsprechende Trajektorie

die Ecken von *C* nicht trifft.) Eine Trajektorie besteht dann aus Strecken (wir nennen

sie Stücke), deren Endpunkte in *C* liegen und die sonst ganz im Inneren von Ω

verlaufen (siehe Bild 4.50).

C

Bild 4.50

Die Situation, daß *C* eine Ellipse ist, haben wir in Abschnitt 4.4 betrachtet. In Satz

4.10 haben wir gesehen, daß alle zu *C* konfokalen, innerhalb von Ω liegenden Ellipsen

C folgende Eigenschaften haben:

(i) Ist ein St¨

uck einer Trajektorie tangential an C , so gilt dies f¨

ur jedes St¨

uck der

Trajektorie.

(ii) Verl¨

auft ein St¨

uck einer Trajektorie außerhalb von C , so gilt dies f¨

ur jedes St¨

uck

der Trajektorie

Allgemein nennt man ein Kurve *C* mit den obigen Eigenschaften eine *Kaustik* für

das Billiard im Inneren von *C*. Das Billiard im Inneren einer Ellipse *C* besitzt also

eine Einparameterschar von Kaustiken, nämlich alle zu *C* konfokalen Ellipsen, die im

Inneren von *C* liegen, sowie alle zu *C* konfokalen Hyperbeln. Man vermutet, daß eine

glatte konvexe Kurve, für die es eine Einparameterschar von Kaustiken gibt, eine

Ellipse ist. Die Existenz einer Kaustik *C* für das Billiard innerhalb einer konvexen

Kurve *C* impliziert, daß jedenfalls sehr viele Trajektorien des Billiards nicht dicht in

Ω sind: Geht man nämlich von einem Punkt $p \in \Omega$ außerhalb von *C* aus, der nahe

bei *C* liegt, so gibt es ein ganzes Segment von Anfangsrichtungen für Trajektorien,

deren erstes Stück zwischen *C* und *C* verläuft. Die entsprechenden Trajektorien

werden dann niemals ins Innere von *C* gelangen. Insbesondere zeigt das, daß sich

Trajektorien nicht allzu gut mischen: eine Situation, die man in der statistischen

Mechanik bei der Untersuchung eines Gases eigentlich nicht erwartet (siehe Bild

4.51).

p

C

C’

Bild 4.51

Es stellt sich die Frage, unter welchen Voraussetzungen an *C* es für Billiards

im Inneren von C Kaustiken gibt. Die Antworten, die man kennt, zeigen, daß es

sich hierbei um ein sehr subtiles Problem handelt (siehe [Berger 1991], [Bunimovich],

[Tabachnikov]): V. Lazutkin hat 1973 gezeigt, daß es im Fall strikt konvexer unend-

lich oft differenzierbarer Randkurven in jeder Umgebung der Randkurve unendlich

viele Kaustiken gibt. Strikt konvex“ bedeutet, daß die Krümmung der Randkur-

”

ve überall strikt positiv ist. Gibt es jedoch einen Punkt, in dem die Krümmung

gleich Null ist, so gibt es keine Kaustiken. J. Mather hat 1982 gezeigt, daß es in die-

sem Fall Trajektorien gibt, die sich für sehr große positive und auch für sehr grosse

negative Zeit beliebig nahe an die Randkurve anschmiegen, aber mit *umgekehrter*

Umlaufrichtung!

Wenn viele Trajektorien dicht in Ω liegen, so findet eine recht gute Durchmischung

der Trajektorien statt. Es ist aber noch nicht ganz die Mischungseigenschaft, die man

in der statistischen Mechanik gerne hätte. Nach Definition liegt eine Trajektorie dicht

in Ω, wenn für jedes $p \in \Omega$ und jedes $\varepsilon > 0$ die Trajektorie die Kreisscheibe um p mit

Radius ε unendlich oft schneidet. Es könnte aber nun sein, daß die Trajektorien

in

den Schnittpunkten mit einer solchen Kreisscheibe alle ungefähr die gleiche Richtung

haben; es könnte aber auch sein, daß die Richtungen etwa gleichverteilt sind. Um

diese zweite Eigenschaft zu präzisieren, führt man den Begriff der Ergodizität ein.

Es sei *M* die Menge aller Paare (**p** , **v**), wobei **p** ein glatter Punkt von *C*, und **v** ein von **p** aus ins Innere von Ω zeigender Einheitsvektor ist (siehe Bild 4.52).

Zu jedem Punkt (**p** , **v**) von *M* gehört eine Trajektorie, die von **p** aus in Richtung

v verläuft (siehe Bild 4.53).

.

.

.

.

.

C

Ω

p

v

Bild 4.52

v

p

Bild 4.53

Sei M die Menge aller (**p** , **v**), für die die Trajektorie keine Ecke von C trifft.

Ferner sei

$T : M \to M$

die Abbildung, die (**p** , **v**) das Paar (**p** , **v**) , bestehend aus dem ersten Schnittpunkt

p des Strahls von **p** aus in Richtung **v** mit C und der Richtung **v** der Trajektorie

nach der ersten Reflexion in **p** , zuordnet (siehe Bild 4.54).

Man sagt, das Billiard im Inneren von C sei *ergodisch*, falls jede T -invariante

meßbare Funktion auf M außerhalb einer Lebesgue-Nullmenge konstant ist. Das

Billiard innerhalb der Ellipse

x 2

x 2

E

1

2

a

=

x ∈ R2

+

= 1

1 ,a 2

a 2

a 2

1

2

ist nicht ergodisch, denn die Funktion, die jedem (**p** , **v**) den Wert λ zuordnet, für den die Gerade

p + t**v**

$t \in$ R

tangential an

x 2

x 2

C

1

2

λ

=

x $\in$ R2

+

= 1

a 2 − λ

$a\ 2 - \lambda$

1

2

ist, ist T -invariant und nicht konstant. Dagegen hat Y. Sinai gezeigt, daß Billiards

im Inneren von Kurven, die stückweise konkav sind, stets ergodisch sind (siehe Bild

4.55).

p’

v’

v p

Bild 4.54

Bild 4.55

Ein anderes Beispiel eines ergodischen Billiards ist der Fall, daß die Randkurve aus

zwei Halbkreisen und zwei parallelen Strecken – wie in Figur 4.56 – zusammengesetzt

ist.

Bild 4.56

Für einen Überblick über Billiards im Inneren von Polygonen verweisen wir auf

[Berger 1991], [Bunimovich] [Tabachnikov].

..

Ubung: Sei C eine strikt konvexe geschlossene Kurve und $\mathbf{p}1$, $\mathbf{p}2$, · · · , $\mathbf{p}$ n Punkte auf C, so daß das Polygon $\mathbf{p}1$, $\mathbf{p}2$, · · · , $\mathbf{p}$ n maximalen Umfang (unter allen in C einbeschriebenen Polygonen mit n Ecken) hat. Dann ist $\mathbf{p}1\mathbf{p}2$, $\mathbf{p}2\mathbf{p}3$, · · · , $\mathbf{p}$ $n-$ 1$\mathbf{p}$ n , $\mathbf{p}$ $n\mathbf{p}1$

eine sich schließende Trajektorie für das Billiard im Inneren von C!

.

.

.

.

.

4.7 Ergänzungen zu Kapitel 4

241

4.7.5

Der Poncelet'sche Schließungssatz

In Satz 4.10 haben wir festgestellt, daß das Billiard im Inneren einer Ellipse E =

Ea

=

(x

+ x 22 = 1

folgende Eigenschaft hat: Ist t eine

1 ,a 2

1 ,x 2) ∈ R2

x 2

1

a 2

1

a 2

2

Trajektorie (Bahnkurve), so geht t entweder zwischen je zwei Reflexionen an E

durch einen der Brennpunkte , oder es gibt eine reelle Zahl λ, so daß t zwischen zwei

Reflexionen stets tangential an den zu E konfokalen Kegelschnitt

x 2

x 2

C

1

2

λ

=

$\mathbf{x} \in$ R2

+

= 1

a 2 − λ

a 2 − λ

1

2

ist. Wir bezeichnen mit $T\lambda$ die Menge aller Trajektorien t des Billiards im Inneren

von E, die $C\lambda$ zwischen je zwei Reflexionen berühren. Nun kann es sein, daß sich

eine Trajektorie schließt, daß heißt, daß die Trajektorie nach einer gewissen Anzahl

von Reflexionen zum Ausgangspunkt zurückkehrt. Man kann zeigen: *Schließt sich*

”

eine Trajektorie in $T\lambda$ nach n Reflexionen, so schließt sich jede Trajektorie in $T\lambda$

nach n Reflexionen.“

¨

Ubung: Zeigen Sie, daß es $\lambda \in \mathrm{R}$ gibt, so daß eine Trajektorie in $T\lambda$ geschlossen ist!

Eine Trajektorie in $T\lambda$, die sich nach n Reflexionen schließt, bildet ein n-Eck (im

Allgemeinen mit Selbstüberschneidung) das in E einbeschrieben und dem Kegel-

schnitt $C\lambda$ umbeschrieben ist. Allgemein definieren wir: Seien C,C zwei verschiedene

Kegelschnitte, die keine Geraden enthalten. Ein n-Eck, das C einbeschrieben und C

umbeschrieben ist, ist ein Folge $\mathbf{p}1$, $\mathbf{p}2$, · · · , $\mathbf{p}$ n paarweise verschiedener Punkte von C, so daß die Verbindungsgeraden von $\mathbf{p}1$ und $\mathbf{p}2$, von $\mathbf{p}2$ und $\mathbf{p}3$, · · · , von $\mathbf{p}$ $n-1$ und $\mathbf{p}$ n und von $\mathbf{p}$ n und $\mathbf{p}1$ alle tangential an C sind. Die

Aussage, die wir oben über

geschlossene Trajektorien des elliptischen Billiards gemacht haben, ist Spezialfall des

Satz 4.17 ***(Schließungssatz von Poncelet)*** *Seien C,C zwei verschiedene Ellip-*

sen. Gibt es ein n-Eck, das C einbeschrieben und C umbeschrieben ist, so geht durch

jeden *Punkt von C ein n-Eck, das C einbeschrieben und C umbeschrieben ist.*

Eine analoge Aussage gilt für beliebige nichtentartete Kegelschnitte. Man muß

dann allerdings zulassen, daß gewisse Punkte der Konfiguration im Unendlichen“

”

liegen (vgl. Abschnitt 4.7.6). Eine ausführliche Diskussion des Poncelet’schen Schlie-

ßungssatzes mit vielen historischen Bemerkungen findet man in [Bos *et al*.], eine

Diskussion von einem etwas anderen Standpunkt aus in [Hurwitz], und mehrere

verschiedene Beweise in [Tabachnikov].

4.7.6

Affine Klassifikation von Kegelschnitten und affine Kurven

In Abschnitt 4.1 haben wir Normalformen für Kegelschnitte bezüglich orientierungs-

erhaltender Kongruenzen (d.h. orientierungserhaltender Abbildungen, die auch den

Abstand erhalten) angegeben. In Kapitel 4 haben wir aber eine Reihe von Aussagen

über Kegelschnitte kennengelernt, in denen der Begriff Abstand“ nicht vorkommt,

”

so z.B. Proposition 66, die besagt, daß ein Kegelschnitt eine Gerade in höchstens

zwei Punkten trifft oder die Gerade ganz enthält. Bei genauem Nachprüfen werden

Sie feststellen, daß in den Abschnitten 4.3, 4.5 und 4.6 der Begriff des

Abstan-

”

des“ überhaupt nicht vorkommt. Bei der Untersuchung von Problemen wie in diesen

Abschnitten ist es nützlich, eine Klasse von Abbildungen der Ebene auf sich zu

betrachten, die größer ist als die der orientierungserhaltenden Kongruenzen. Diese

Abbildungen sollten wohl noch Geraden in Geraden überführen, aber nicht mehr

notwendigerweise Abstände erhalten.

Definition 85 *Eine* affine Transformation der Ebene *ist eine Abbildung* R2 → R2

der Form

x 1

→

a 11 a 12

x 1

v

+

1

x 2

a 21 a 22

x 2

v 2

a

wobei

11

a 12

eine (2 × 2) *-Matrix mit von Null verschiedener Determinante*

a 21 a 22

v

und

1

ein Vektor in R2 *ist.*

v 2

¨

Ubung: Zeigen Sie:

(i) Affine Transformationen sind bijektiv!

(ii) Die affinen Transformationen bilden eine Gruppe!

(iii) Affine Transformationen bilden Geraden auf Geraden und Kegelschnitte auf Kegelschnitte ab!

Wir sagen, zwei Kegelschnitte seien *affin* ¨

aquivalent, wenn sie sich durch eine

affine Transformation aufeinander abbilden lassen. Offenbar wird die Ellipse

x 2

x 2

$E = E$

1

2

a

=

(x

+

= 1

1 ,a 2

1 ,x 2) ∈ R2

a 2

a 2

1

2

durch die affine Transformation

x

x

(x

1

2

1 ,x 2) → (

,

)

a 1 a 2

bijektiv auf den Kreis

(x 1 ,x 2) ∈ R2 x 2 + x 2 = 1

abgebildet. Da jede orientie-

1

2

rungserhaltende Kongruenz eine affine Transformation ist, ist jeder Kegelschnitt affin

äquivalent zu einem der in Satz 4.1 genannten. Es ist leicht nachzuprüfen, welche

der in Satz 4.1 aufgeführten Kegelschnitte affin äquivalent sind. Es ergibt sich:

.

.

.

4.7 Ergänzungen zu Kapitel 4

Satz 4.18 *Jeder nichtleere Kegelschnitt ist affin* ¨

aquivalent zu einem der folgenden:

(x 1 ,x 2) ∈ R2 x 2 + x 2 = 1

1

2

(x 1 ,x 2) ∈ R2 x 2 − x 2 = 1

1

2

(x 1 ,x 2) ∈ R2 x 2 = x 21

(x 1 ,x 2) ∈ R2 x 2 + x 2 = 0

1

2

(x 1 ,x 2) ∈ R2 x 2 − x 2 = 0

1

2

$(x 1 ,x 2) \in R2 \; x 2 - 1 = 0$

1

$(x 1 ,x 2) \in R2 \; x 2 = 0$

1

Die Klassifikation von Kegelschnitten bis auf affine Äquivalenz ist also wesentlich

einfacher als die Klassifikation bis auf orientierungserhaltende Kongruenz. Insbeson-

dere treten keine freien Parameter“ auf. Man kann versuchen, auch Kurven höheren

”

Grades bis auf affine Äquivalenz zu klassifizieren. Eine *ebene affine Kurve vom Grad*

n ist eine Menge der Form

$(x 1 ,x 2) \in R2 \; f (x 1 ,x 2) = 0$

wobei *f* ein Polynom vom Grad *n* in den Variablen $x 1 ,x 2$ ist. Ein Beispiel ist die

Fermatkurve“

”

$(x 1 ,x 2) \in R2 \; xn + xn = 1$

1

2

Ist $(x 1 ,x 2)$ ein Punkt der Fermatkurve mit rationalen Koordinaten $x 1 = a , x$

c

2 =

b , $a,b,c \in$ Z , $c = 0$, so ist $an + bn = cn$. Die von Wiles und Taylor 1994 bewiesene

c

Fermat'sche Vermutung besagt , daß für $n \geq 3$ die Fermatkurve keinen Punkt mit

rationalen Koordinaten hat. Ein anderes Beispiel einer affinen Kurve ist (siehe Bild

4.57)

(x 1 ,x 2) ∈ R2 x 2 = x 3 − x

2

1

1

Diese Kurve hat Grad 3. Die Klassifikation von Kurven vom Grad 3 bis auf affine

x2

-1

+1

x1

Bild 4.57

Äquivalenz hat I.Newton durchgeführt. Man kommt dabei auf über 70 verschiedene

Fälle. Will man diese Klassifikation besser verstehen und noch weiter treiben, so

empfiehlt es sich, zunächst nach noch gröberen Kriterien zu klassifizieren. Dies führt

zur Betrachtung von Kurven in der komplex projektiven Ebene (siehe Abschnitt

4.7.7 und für Weitergehendes [Brieskorn–Knörrer]).

Satz 4.8 besagt, daß sich zwei Kurven vom Grad 2 in höchstens $4 = 2 \cdot 2$ Punkten

schneiden, wenn sie nicht eine Kurve vom Grad ≤ 2 gemeinsam haben. Diese Aussage

ist ein Spezialfall von

Satz 4.19 ***(Satz von B´***

ezout)

Seien C_1 *und* C_2 *ebene Kurven vom Grad* n_1

bzw. n_2 *, so daß es keine ebene Kurve C mit unendlich vielen Punkten gibt, die im*

Durchschnitt $C_1 \cap C_2$ *von* C_1 *und* C_2 *enthalten ist. Dann ist*

$|C_1 \cap C_2| \leq n_1 \cdot n_2$

..

Ubung: (i) Zeigen Sie unter Verwendung des Satzes von Bézout: Seien C_1 und C_2

ebene Kurven vom Grad n_1 bzw. n_2 mit $|C_1 \cap C_2| = n_1 \cdot n_2$. Gibt es eine ebene Kurve C vom Grad $d \leq n_2$, die genau $n_1 \cdot d$ Punkte von $C_1 \cap C_2$ enthält, und gibt es keine Kurve C

$\subset C$ mit einem Grad $0 < d < d$, die genau $n\ 1 \cdot d$ Punkte

von $C\ 1 \cap C\ 2$ enthält, so gibt es eine ebene Kurve vom Grad $n\ 2 - d$, die die nicht auf

C gelegenen Punkte von $C\ 1 \cap C\ 2$ enthält!

(ii) Sei $g(\ t)$ ein Polynom dritten Grades mit drei verschiedenen reellen Nullstellen.

Setzen Sie

$C :=$

$(\ x\ 1\ ,x\ 2) \in$ R2 $x\ 2 = g(\ x$

2

1)

Führen Sie außerdem einen idealen Punkt ∞“ ein und setzen Sie

”

–

$C := C \cup \{\infty\}$

Zeigen Sie: Es gibt eine Verknüpfung + auf ¯

C, so daß (¯

C, +) eine kommutative

Gruppe mit ∞ als neutralem Element ist und so, daß für drei verschiedene Punkte

$p,q,r \in C$, die auf einer Geraden liegen, $p + q + r = \infty$ gilt!

4.7.7

Die projektive Ebene

Wahrscheinlich haben Sie sich beim Lesen des Abschnittes 4.5 über die Sätze von

Pascal, Brianchon und Pappos und des Abschnittes 4.6 über Dualität über die Lang-

atmigkeit einiger Beweise und die vielen Fallunterscheidungen geärgert. Die Fallun-

terscheidungen waren notwendig, weil wir unterscheiden mußten, ob zwei Geraden

parallel waren oder sich schnitten. Es gibt eine Möglichkeit, diese Fälle zusammenzu-

fassen, so daß sowohl die Formulierungen der Sätze als auch ihrer Beweise klarer und

durchsichtiger werden: Die Einführung der projektiven Ebene. Wir wollen hier nur

kurz die Definition und die wichtigsten Konstruktionen vorstellen. Eine ausführliche

Motivation findet man in [Brieskorn–Knörrer] I.3. Um die projektive Ebene P2(R) zu

definieren, führen wir auf dem Komplement des Nullpunktes in R3 eine Äquivalenz-

relation ∼ ein. Wir sagen, zwei Vektoren (x 0 ,x 1 ,x 2) und (x ,x ,x) in R3 \{**0** } seien 0

1

2

äquivalent, wenn es einen Skalar $\lambda \in$ R \ { 0 } gibt, so daß (x 0 ,x 1 ,x 2) = $\lambda \cdot$ (x ,x ,x).

0

1

2

Die *projektive Ebene* P2(R) ist dann die Menge aller Äquivalenzklassen dieser Äqui-

valenzrelation:

.
.
.
.
.
.
.

P2(R) = R3 \ {**0** }/ ∼

Die Äquivalenzklasse von (x 0 ,x 1 ,x 2) bezeichnen wir mit [x 0 ,x 1 ,x 2]. Man sieht sofort, daß die Äquivalenzklasse eines Vektors (x 0 ,x 1 ,x 2) ∈ R3 \ {**0** } genau zwei Punkte auf der Sphäre S 2 =

(x 0 ,x 1 ,x 2) ∈ R3

x 2 + x 2 + x 2 = 1

enth

0

1

2

ält, nämlich

die Punkte ±

1

√

(x 0 ,x 1 ,x 2). Die projektive Ebene kann also auch aufgefaßt

x 2

0+ x 2

1+ x 2

2

werden als der Quotient von S 2 nach der Äquivalenzrelation, bei der antipodale

Punkte als äquivalent aufgefaßt werden (vgl. Abschnitt 3.5.4). Als nächstes definieren

wir Geraden und Quadriken in P2(R). Eine *Gerade* in P2(R) ist eine Teilmenge der

Form

[x 0 ,x 1 ,x 2] ∈ P2(R) a 0 x 0 + a 1 x 1 + a 2 x 2 = 0

wobei (a 0 ,a 1 ,a 2) ∈ R3 \{**0** }. Man beachte, daß für einen Vektor (x 0 ,x 1 ,x 2) ∈ R3 \{**0** }

die Gleichung a 0 x 0 + a 1 x 1 + a 2 x 2 = 0 genau dann erfüllt ist, wenn für jeden zu (x 0 ,x 1 ,x 2) äquivalenten Vektor (x ,x ,x) ebenfalls die Gleichung a

+ a

+

0

1

2

0 x 0

1 x 1

a 2 x = 0 gilt. Deshalb macht die obige Definition Sinn. Ebenso definiert man eine

2

Quadrik in P2(R) als eine Teilmenge der Form

[x 0 ,x 1 ,x 2] ∈ P2(R)

$aijxixj$ = 0

0 ≤i≤j≤ 2

wobei nicht alle aij gleich Null sind. Die Beziehung zwischen der Ebene R2 und der

projektiven Ebene P2(R) wird durch die Abbildung

ip : R2

→ P2(R)

(x 1 ,x 2)

→

[1 ,x 1 ,x 2]

hergestellt.

Lemma 86 *i) ip ist injektiv.*

ii) Nennen wir G∞ =

[x 0 ,x 1 ,x 2] ∈ P2(R) x 0 = 0

die unendlich ferne Gerade ,

so ist das Bild von ip gerade das Komplement von G_∞ *in* $P_2(\mathbb{R})$.

iii) Ist G eine von G_∞ *verschiedene Gerade in* $P_2(\mathbb{R})$ *, so ist* $i_p^{-1}(G)$ *eine Gerade in*

$\mathbb{R}^2$. *Ist umgekehrt g eine Gerade in* $\mathbb{R}^2$ *, so gibt es eine Gerade G in* $P_2(\mathbb{R})$ *, so daß*

$g = i_p^{-1}(G)$.

iv) Ist Q eine Quadrik in $P_2(\mathbb{R})$ *, so ist* $i_p^{-1}(Q)$ *ein Kegelschnitt, eine Gerade oder*

leer. Ist umgekehrt C ein Kegelschnitt in $\mathbb{R}^2$ *, so gibt es eine Quadrik Q in* $P_2(\mathbb{R})$,

so daß $C = i_p^{-1}(Q)$.

Beweis i) Sind (x_1, x_2) und (x_1', x_2') Punkte von $\mathbb{R}^2$ mit $i_p(x_1, x_2) = i_p(x_1', x_2')$, so

$p(x_1, x_2) = i_p(x_1', x_2')$

ist nach Definition $(1, x_1, x_2) \sim (1, x_1', x_2')$. Das heißt, es gibt $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so

daß 1

2

(1 ,x 1 ,x 2) = λ(1 ,x ,x). Betrachtet man die erste Komponente dieser Gleichung, so

1

2

sieht man, daß λ = 1. Somit ist (x 1 ,x 2) = (x ,x).

1

2

ii) Offenbar ist ip(R2) ⊂ P2(R) \ G∞. Ist umgekehrt [x 0 ,x 1 ,x 2] ∈ P2(R) \ G∞, so ist x 0 = 0 und somit

[x

x 1

0 ,x 1 ,x 2] =

1 , x 1 , x 2

= i

, x 2

x

p

0 x 0

x 0 x 0

iii) Sei G =

[x 0 ,x 1 ,x 2] ∈ P2(R) a 0 x 0 + a 1 x 1 + a 2 x 2 = 0 mit (a 0 ,a 1 ,a 2) ∈ R3 \{ 0 }.

Da G = G∞, ist (a 1 ,a 2) = (0 , 0). Nach Definition ist

i− 1(G) =

(x

p

1 ,x 2) ∈ R2

a 0 + a 1 x 1 + a 2 x 2 = 0

eine Gerade in R2. Da jede Gerade in R2 in dieser Form geschrieben werden kann,

ist Teil (iii) des Lemmas bewiesen.

iv) beweist man ähnlich wie (iii).

✷

Geometrisch kann man sich die Einbettung ip : R2 → P2(R) folgendermaßen

vorstellen: Ist (x 0 ,x 1 ,x 2) ∈ R3 \ {**0** }, so besteht die Äquivalenzklasse von (x 0 ,x 1 ,x 2) aus allen Punkten der Geraden durch **0** und (x 0 ,x 1 ,x 2), die von **0** verschieden sind.

Deshalb läßt sich P2(R) auch auffassen als die Menge aller Geraden in R3, die durch

den Koordinatenursprung (0 , 0 , 0) gehen. Die Abbildung ip : R2 → P2(R) ist dann

die Abbildung, die jedem Punkt (x 1 ,x 2) ∈ R2 die Gerade durch **0** und (1 ,x 1 ,x 2)

zuordnet. Die Punkte der

unendlich fernen Geraden“ G

”

∞ in P2(R) entsprechen

den Geraden in R3 durch **0**, die ganz in der x 1 ,x 2-Ebene enhalten sind.

x 0

(1,x ,x)

1

2

(1,0,0)

x 2

x 1

Bild 4.58

Ein Grund dafür, daß die Einführung des projektiven Raums viele geometrische

Überlegungen vereinfacht, liegt in

Satz 4.20 *i) Durch je zwei verschiedene Punkte von* P2(R) *gibt es genau eine Ge-*

rade.

ii) Je zwei verschieden Geraden in P2(R) *schneiden sich in genau einem Punkt.*

Beweis i) Sind [y 0 ,y 1 ,y 2] und [y ,y ,y] zwei verschiedene Punkte von P

0

1

2

2(R), so

sind die Vektoren (y 0 ,y 1 ,y 2) und (y ,y ,y) in R3 linear unabh

0

1

2

ängig. Deshalb ist der

Lösungsraum des linearen Gleichungssystems

y 0 a 0 + y 1 a 1 + y 2 a 2 = 0

y a

a

a

0 0 + y 1 1 + y 2 2

=

0

in den Variablen (a 0 ,a 1 ,a 2) eindimensional. Somit gibt es ein bis auf Multiplika-

tion mit Skalaren eindeutiges Tripel (a 0 ,a 1 ,a 2), so daß sowohl (y 0 ,y 1 ,y 2) als auch (y ,y ,y) auf der Geraden

0

1

2

.

4.7 Ergänzungen zu Kapitel 4

247

[x 0 ,x 1 ,x 2] ∈ P2(R) aox 0 + a 1 x 1 + a 2 x 2 = 0

liegen.

ii) Seien

G 1 =

[x 0 ,x 1 ,x 2] ∈ P2(R) a 0 x 0 + a 1 x 1 + a 2 x 2 = 0

und G 2 =

[x 0 ,x 1 ,x 2] ∈ P2(R) b 0 x 0 + b 1 x 1 + b 2 x 2 = 0

zwei verschiedene Geraden in P2(R). Dann stimmen die beiden Untervektorräume

V 1 =

(x 0 ,x 1 ,x 2) ∈ R3 a 0 x 0 + a 1 x 1 + a 2 x 2 = 0

V 2 =

(x 0 ,x 1 ,x 2) ∈ R3 b 0 x 0 + b 1 x 1 + b 2 x 2 = 0

von R3 nicht überein. Also ist V 1 ∩ V 2 ein eindimensionaler Untervektorraum von

R3. Es gibt also (y 0 ,y 1 ,y 2) ∈ R3 \ {**0** }, so daß

V 1 ∩ V 2 =

$\lambda \cdot (y_0, y_1, y_2)$ $\lambda \in \mathbb{R}$

Dann ist

$G_1 \cap G_2 = \{[y_0, y_1, y_2]\}$

✷

In Lemma 86 haben wir gesehen, daß es für jede Gerade g in $\mathbb{R}^2$ eine Gerade

G in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ gibt, so daß $g = i^{-1}(G)$. Nach Satz 4.20 schneidet G die unendlich

p

ferne Gerade G_∞ in genau einem Punkt g_∞. Wir nennen g_∞ den unendlich fernen

”

Punkt“ von g. Offenbar ist $G = ip(g) \cup g_\infty$. Von nun an identifizieren wir $\mathbb{R}^2$ mit

$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus G_\infty$ mittels der Abbildung ip. Wie wir oben gesehen haben, wird jede Gerade

g in $\mathbb{R}^2$ durch Hinzufügen ihres unendlich fernen Punktes g_∞ zu einer projektiven

Geraden G komplettiert. Wir nennen G die *projektive Komplettierung* von g. Sind

g_1, g_2 zwei parallele, voneinander verschiedene Geraden, und G_1, G_2 ihre projektiven

Komplettierungen, so liegt der (nach obigem Satz existierende) Schnittpunkt von G_1

und G_2 in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus \mathbb{R}^2 = G_\infty$. Parallele Geraden schneiden sich also auf der unendlich

”

fernen Geraden“. Mit dieser Betrachtungsweise läßt sich der Satz von Pappos nun

einfacher so formulieren:

Satz 4.21 ***(Projektive Version des Satzes von Pappos)*** *Seien* L_1, L_2 *verschie-*

dene Geraden in $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ *, sowie* $p(1), p(3), p(5) \in L_1$ *und* $p(2), p(4), p(6) \in L_2$ *paarweise verschieden Punkte von* $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ *. Keiner dieser Punkte liege auf* $L_1 \cap L_2$ *. Wir setzen*

$p(7) = p(1)$ *und bezeichnen mit* G_j *die Verbindungsgerade von* $p(j)$ *und* $p(j+1)$ *. Dann liegen die Schnittpunkte* $q(1)$ *von* G_1 *und* G_4 *,* $q(2)$ *von* G_2 *und* G_5 *und* $q(3)$ *von* G_3

und G_6 *auf einer Geraden.*

Aus der projektiven Version des Satzes von Pappos folgt die affine Version (d.h.

Satz 4.12), indem man die entsprechenden affinen Geraden g_j zu projektiven Geraden

G_j komplettiert. Im Fall *1*) von Satz 4.12 schneiden sich G_1 und G_4, G_2 und G_5

.

sowie G_3 und G_6 außerhalb von G_∞, und die Schlußfolgerung läßt sich direkt aus

der projektiven Version des Satzes von Pappos herleiten. Im Fall *2*) von Satz 4.12

liegt der Schnittpunkt $q(1)$ von G_1 und G_4 auf G_∞, während die Schnittpunkte

$q(2)$ bzw. $q(3)$ von G_2 und G_5 bzw. G_3 und G_6 im Endlichen“, d.h. in $\mathbb{R}_2$ liegen.

”

Nach der projektiven Version des Satzes von Pappos geht die Verbindungsgerade

L von $q(2)$ und $q(3)$ durch den Punkt $q(1)$. L,G 1 und G 4 treffen sich also in dem auf $G\infty$ gelegenen Punkt $q(1)$. Da nach dem obigen Satz je zwei dieser Geraden nur

einen Schnittpunkt haben, treffen sich ihre im Endlichen“ gelegenen Teile nicht.

”

Insbesondere ist

:= $L \cap$ R2 parallel zu g 1 und g 4. Schließlich liegen im Fall *3*)

sowohl der Schnittpunkt $q(1)$ von G 1 und G 4 als auch der Schnittpunkt $q(2)$ von G 2

und G 5 auf der unendlich fernen Geraden $G\infty$. Nach der projektiven Version des

Satzes von Pappos liegt dann auch der Schnittpunkt $q(3)$ von G 3 und G 6 auf $G\infty$,

d.h. g 3 und g 6 sind parallel.

Ein Beweis des Satzes von Pappos mit den Mitteln der projektiven Geometrie

ist wesentlich kürzer als der Beweis, den wir für Satz 4.12 gegeben haben. Um ihn

durchzuführen, verwenden wir noch ein weiteres Konzept.

Definition 87 *Eine* projektive Transformation *ist eine Abbildung der Form*

T : P2(R) → P2(R)

[**x**]

→

[$A\mathbf{x}$]

wobei A eine invertierbare (3 × 3) *-Matrix ist.*

..

Ubung: Zeigen Sie:

(i) Projektive Transformationen sind bijektiv und bilden Geraden auf Geraden ab!

(ii) Sind G und H Geraden in P2(R), so gibt es eine projektive Transformation T

mit T (G) = H!

Beweis der projektiven Version des Satzes von Pappos: Zunächst beweisen wir den

Satz in dem Spezialfall, daß $q(1) = q(2)$, und daß die Verbindungsgerade L von $q(1)$

und $q(2)$ gleich der unendlich fernen“ Geraden G

”

∞ ist. Es bezeichne

$gj := Gj \cap$ R2

den im Endlichen“ gelegenen Teil der Geraden G

”

j . Dann sind $p(1)$,$p(2)$, · · · ,$p(6) \in$

R2, denn wäre etwa $p(1) \in G\infty$ so wäre $p(1)$ der unendlich ferne Punkt von G 1, und

somit gleich $q(1)$. L 1 und G 4 träfen dann die Gerade $G\infty$ in $p(1) = q(1)$, also wäre $p(1) = p(4)$. Nach Konstruktion sind die Geraden g 1 und g 4 bzw. g 2 und g 5 parallel.

Dieser spezielle Fall des Satzes von Pappos in R2 ist aber leicht direkt zu beweisen

– wir haben diesen Beweis im Fall 3 des Beweises von Proposition 78 durchgeführt.

Also sind g 3 und g 6 parallel, und somit liegt auch der Schnittpunkt $q(3)$ von G 3 und

G 6 auf $G\infty = L$.

Aus diesem Spezialfall leitet man die allgemeine Fassung der projektiven Version des

Satzes von Pappos nun folgendermaßen her: Falls $q(1) = q(2) = q(3)$, ist nichts zu

.

zeigen. Ansonsten kann man annehmen, daß $q(1) = q(2)$. Es bezeichne L die Verbin-

dungsgerade von $q(1)$ und $q(2)$. Nach Teil (ii) der Übung gibt es eine projektive Trans-

formation T , so daß $T(L) = G\infty$. Dann kann man den eben bewiesenen Spezialfall auf

die Konfiguration der Punkte

$T(p(1)), T(p(2)), \cdots, T(p(6)), T(q(1)), T(q(2)), T(q(3))$ anwenden und sieht, daß $T(q(3))$ auf $G\infty = T(L)$ liegt. Somit liegt $q(3)$ auf L, d.h, $q(1), q(2), q(3)$ liegen auf einer Geraden.

✷

Auch die Dualität aus Abschnitt 4.6 läßt sich mit Hilfe der projektiven Ebene

einfacher formulieren. Man erhält nämlich eine Bijektion zwischen der Menge der

Punkte in P2(R) und der Menge der Geraden in P2 (R), indem man jedem Punkt

[p 0 ,p 1 ,p 2] von P2(R) die Gerade

[x 0 ,x 1 ,x 2] ∈ P2(R) p 0 x 0 + p 1 x 1 + p 2 x 2 = 0

zuordnet. Für diese Zuordnung gilt (4.16); und die Aussage von Lemma 80 ist eine

einfache Folgerung. Überlegungen, wie wir sie hier für Geraden und Konfigurationen

von Geraden in P2(R) angestellt haben, kann man natürlich auch für Quadriken

anstellen. Dabei vereinfacht sich die Behandlung der Sätze von Pascal und Brianchon

entsprechend. Siehe z.B. [Berger].

5

Quadriken in R3

Kegelschnitte haben wir in Kapitel 4 dadurch charakterisiert, daß sie Nullstellen-

mengen von quadratischen Gleichungen in R2 sind. Ähnlich sagen wir

Definition 88 *Eine* Quadrik *in* R3 *ist eine Teilmenge von* R3 *der Form*

3

3

Q = {(x 1 ,x 2 ,x 3) ∈ R3 |

$aijxixj$ +

$bjxj$ + c = 0 } ,

$i,j=1$

$j=1$

wobei a_{ij} (i,j = 1 , 2 , 3) , b_1 , b_2 , b_3 *und c reelle Zahlen sind und es ein Paar* (i,j) *gibt, so daß* $a_{ij} + a_{ji} = 0$.

Da $x_i x_j = x_j x_i$, läßt sich die Gleichung einer Quadrik auch in der Form

3

3

3

$a_{ii} x_2 +$

(a

b

i

$_{ij} + a_{ji}$) $x_i x_j +$

$_j x_j + c = 0$

$i=1$

$i,j=1$

$j=1$

$i<j$

oder auch

3

3

1 / 2 (*aij* + *aji*) *xixj* +

bjxj + *c* = 0

i,j=1

j=1

schreiben. Wir können deshalb in der obigen Definition annehmen, daß *aij* = *aji*

(ersetze sonst *aij* durch 1 / 2 (*aij* + *aji*)!). In anderen Worten, wir können annehmen,

daß die Matrix

⎛

⎝

a 11 *a* 12 *a* 13

A = ⎝ *a*

⎞

21

a 22 *a* 23

a 31 *a* 32 *a* 33

symmetrisch bezüglich Spiegelung an der Hauptdiagonalen ist. Setzen wir

b := (*b* 1 ,*b* 2 ,*b* 3)

so schreibt sich die Gleichung von *Q* als

x · (**Ax**) + **b** · **x** + *c* = 0 ,

(5.1)

Hier ist **x** = (x 1 ,x 2 ,x 3),

⎛

⎝

a 11 x 1 + a 12 x 2 + a 13 x 3

Ax = ⎝ a

⎠

21 x 1 + a 22 x 2 + a 23 x 3

a 31 x 1 + a 32 x 2 + a 33 x 3

der Vektor in R3 , der durch Anwenden der Matrix **A** auf den Vektor **x** entsteht,

und · das Skalarprodukt in R3 (vgl. Kapitel 2).

Ähnlich wie Kapitel 4 wollen wir Normalformen für Quadriken in R3 angeben.

Ein erster Schritt dazu ist die

.

5.1 Hauptachsentransformation für quadratische Formen

251

5.1

Hauptachsentransformation f¨

ur quadratische Formen

Wie in Abschnitt 4.1 sagen wir

Definition 89 *Eine* quadratische Form *in drei Variablen ist eine Abbildung*

q : R3 −→ R *der Form*

$q(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot (\mathbf{A}\mathbf{x})$,

wobei $\mathbf{A} = (\ aij)$ *eine reelle symmetrische* (3×3) *-Matrix ist.*

In Lemma 56 haben wir Normalformen für quadratische Formen in zwei Variablen

angegeben. Eine entsprechende Aussage gilt auch für quadratische Formen in drei

(oder auch mehr) Variablen.

Satz 5.1 *Sei* $q : \mathrm{R}3 \longrightarrow \mathrm{R}$ *eine quadratische Form in drei Variablen. Dann gibt es*

drei paarweise aufeinander senkrecht stehende Vektoren $\mathbf{v}(1)$, $\mathbf{v}(2)$, $\mathbf{v}(3)$ *der L¨*

ange 1

(d.h. $\mathbf{v}(\ i) \cdot \mathbf{v}(\ j) = 0$ *für* $i = j$*, und* $\mathbf{v}(\ i) \cdot \mathbf{v}(\ i) = 1$*) und reelle Zahlen* $\alpha\ 1 \geq \alpha\ 2 \geq \alpha\ 3$ *, so daß*

$q(\ x$

2

2

2

$1\mathbf{v}(1) + x\ 2\mathbf{v}(2) + x\ 3\mathbf{v}(3)) = \alpha\ 1\ x\ 1 + \alpha\ 2\ x\ 2 + \alpha\ 3\ x\ 3$

f¨

ur alle $(\ x\ 1\ ,x\ 2\ ,x\ 3) \in \mathrm{R}3$.

Bemerkungen 90

(i) Ein System $\mathbf{v}(1)$, $\mathbf{v}(2)$, $\mathbf{v}(3)$ von Vektoren in R3 mit der

Eigenschaft, daß $\mathbf{v}(\ i) \cdot \mathbf{v}(\ j) = 0$ für $i = j$ und $\mathbf{v}(\ i) \cdot \mathbf{v}(\ i) = 1$ nennt man auch eine

Orthonormalbasis von R3.

..

Ubung: Zeigen Sie, daß eine Orthonormalbasis von R3 stets eine Basis im Sinn

der Linearen Algebra ist!

(ii) Satz 5.1 besagt, daß keine gemischten Terme $x_i x_j$ ($i = j$) auftreten, wenn man

die quadratische Form q bezüglich einer geeigneten Basis (nämlich $\mathbf{v}(1)$, $\mathbf{v}(2)$,

$\mathbf{v}(3)$) aufschreibt. Man sagt auch, bezüglich der Basis $\mathbf{v}(1)$, $\mathbf{v}(2)$, $\mathbf{v}(3)$ sei die

quadratische Form diagonalisiert. Die Achsen $\{t\,\mathbf{v}(j) \mid t \in \mathrm{R}\}$, $j = 1, 2, 3$ heißen auch *Hauptachsen* der quadratischen Form; und Satz 5.1 nennt man den Satz

über die *Hauptachsentransformation*.

(iii) Ist $q(\mathbf{x}) = \alpha_1 x_2 + \alpha$

$+ \alpha$

mit α

1

$2 x_2$

2

$3 x_2$

3

$1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3$ eine bereits diagonalisierte

quadratische Form, so nimmt die Einschränkung von q auf die Sphäre $S_2 :=$

$\{\mathbf{x} \in \mathrm{R}3 \mid x_2$

2

2

1 + x 2 + x 3

= 1 } ihr Maximum in den Punkten (± 1 , 0 , 0) an. Dies

sind die Durchstoßpunkte der ersten Hauptachse mit S 2. Diese Beobachtung

ist die Motivation für den nun folgenden Beweis, in dem für eine allgemeine

quadratische Form q der Vektor **v**(1) als einer derjenigen Punkte auf S 2 gewählt

wird, in denen q S 2 ein Maximum annimmt.

Beweis von Satz 5.1 Sei

$q(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot (\mathbf{A}\mathbf{x})$

mit einer symmetrischen Matrix $\mathbf{A} = (aij)$. Setze für $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in$ R3

.

3

$B(\mathbf{x} , \mathbf{y}) := \mathbf{x} \cdot (\mathbf{A}\mathbf{y}) =$

$aij\ xiyj$.

i,j=1

Da $aij = aji$, gilt

$B(\mathbf{x} , \mathbf{y})$

=

$B(\mathbf{y}\ ,\ \mathbf{x})$ für alle $\mathbf{x}\ ,\ \mathbf{y} \in$ R3

$B(\mathbf{x} + \mathbf{x}\ ,\ \mathbf{y})$

=

$B(\mathbf{x}\ ,\ \mathbf{y}) + B(\mathbf{x}\ ,\ \mathbf{y})$ für alle $\mathbf{x}\ ,\ \mathbf{x}\ ,\ \mathbf{y} \in$ R3

(5.2)

$B(\ \lambda\mathbf{x}\ ,\ \mathbf{y})$

=

$\lambda \cdot B(\mathbf{x}\ ,\ \mathbf{y})$ für alle $\mathbf{x}\ ,\ \mathbf{y} \in$ R3 ,$\lambda \in$ R

Offenbar gilt für $\mathbf{x} \in$ R3, daß

$q(\mathbf{x}) = B(\mathbf{x}\ ,\ \mathbf{x})$

(5.3)

Allgemein nennt man Abbildungen B : R3 × R3 −→ R, für die (5.2) gilt, *symmetri-*

sche Bilinearformen.

..

Ubung:

(i) Zeigen Sie: Ist B : R3 × R3 −→ R eine symmetrische Bilinearform, so ist

$B(\mathbf{x}\ ,\ \mathbf{y} + \mathbf{y}\ ) = B(\mathbf{x}\ ,\ \mathbf{y}) + B(\mathbf{x}\ ,\ \mathbf{y}\ )$ und $B(\mathbf{x}\ ,\lambda\mathbf{y}) = \lambda B(\mathbf{x}\ ,\ \mathbf{y})$!

(ii) Zeigen Sie: In der obigen Situation ist

$B(\mathbf{x}\ ,\ \mathbf{y}) = 1\ /\ 2\ [\ q(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - q(\mathbf{x}) - q(\mathbf{y})]$

Nach (5.2) und (5.3) ist für jedes System $\mathbf{w}(1)$, $\mathbf{w}(2)$, $\mathbf{w}(3)$ von drei Vektoren in R3

$q(x$

2

2

2

$1\mathbf{w}(1) + x\ 2\mathbf{w}(2) + x\ 3\mathbf{w}(3)\ )$

$=$

$q(\mathbf{w}(1))\ x\ 1 + q(\mathbf{w}(2))\ x\ 2 + q(\mathbf{w}(3))\ x\ 3$

$+2$

$xixj\ B(\mathbf{w}(\ i)\ ,\ \mathbf{w}(\ j))$

$1 \leq i < j \leq 3$

Die Vektoren $\mathbf{v}(1)$, $\mathbf{v}(2)$, $\mathbf{v}(3)$, die wir konstruieren wollen, müssen also die Eigenschaft

$B(\mathbf{v}(\ i)\ ,\ \mathbf{v}(\ j)) = 0$ für $i = j$

haben. Wir werden darauf gleich (in Lemma 91) eingehen. Zunächst betrachten wir

die 2-Sphäre

$S\ 2 := \{\mathbf{x} \in R3 \mid x\ 2$

2

2

$1 + x\ 2 + x\ 3$

$= 1\ \}$

und die Einschränkung $q|S\ 2$ von q auf $S\ 2$. Dies ist eine stetige Funktion auf $S\ 2$.

Nach

einem Satz aus der Analysis nimmt die Funktion $q|S\,2$ ihr Maximum an. Es gibt also

$\mathbf{v}(1) \in S\,2$, so daß

$q(\mathbf{v}(1)) \geq q(\mathbf{y})$ für alle $\mathbf{y} \in S\,2$.

(5.4)

Setze

.
.
.
.
.
.
.

$\alpha\,1 := q(\mathbf{v}(1))$

Sei E die zu $\mathbf{v}(1)$ orthogonale Ebene, das heißt

$E := \{\mathbf{x} \in \mathrm{R}3 \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}(1) = 0\ \}$

Ein wichtiger Schritt beim Beweis von Satz 5.1 ist

Lemma 91 *F¨*

ur alle $\mathbf{x} \in E$ *gilt* $B(\mathbf{x}\ , \mathbf{v}(1)) = 0$.

Beweis von Lemma 91 Wir nehmen an, es gäbe $\mathbf{x} \in E$, so daß $B(\mathbf{x}\ , \mathbf{v}(1)) = 0$.

Im Durchschnitt von $S\,2$ mit der von $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$ und $\mathbf{v}(1)$ aufgespannten Ebene suchen wir

einen Punkt , in dem q einen Wert annimmt, der größer als α 1 := q(**v**(1)) ist. Da

x · **v**(1) = 0, ist für jede reelle Zahl t

v(1) + t **x** 2 = **v**(1) 2 + t 2 **x** 2 = 1 + t 2 **x** 2

Insbesondere ist **v**(1) + t **x** stets von Null verschieden. Setze

1

y(t) :=

v(1) + t **x**

v(1) + t **x**

v (1)

v (1) +tx

y(t)

x

Bild 5.1

Dann ist für alle t

y(t) ∈ S 2

und **y**(0) = **v**(1)

Ferner ist nach (5.3) und (5.2)

q (**y**(t))

=

B(**y**(t) , **y**(t))

1

1

=

B

$(\mathbf{v}(1) + t\,\mathbf{x})$,

$(\mathbf{v}(1) + t\,\mathbf{x}) =$

$\mathbf{v}(1) + t\,\mathbf{x}$

$\mathbf{v}(1) + t\,\mathbf{x}$

1

=

$B(\mathbf{v}(1) + t\,\mathbf{x}\,,\ \mathbf{v}(1) + t\,\mathbf{x})$

$\mathbf{v}(1) + t\,\mathbf{x}$ 2

1

=

$B(\mathbf{v}(1)\,,\ \mathbf{v}(1)) + 2\,t\,B(\mathbf{x}\,,\ \mathbf{v}(1)) + t\,2\,B(\mathbf{x}\,,\ \mathbf{x})$ 1 + t 2 $\mathbf{x}$ 2

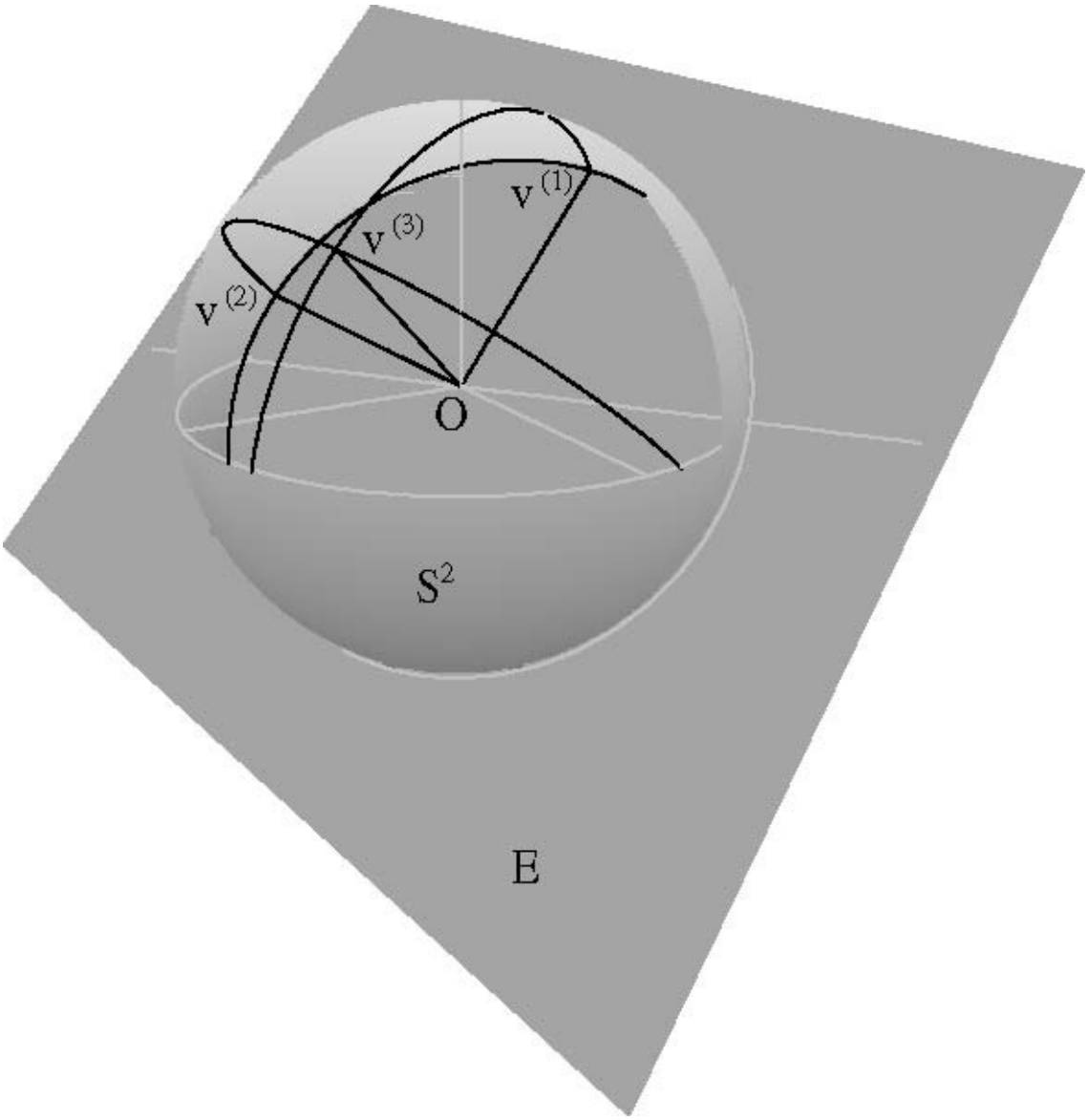
1

=

α

1 + t 2 $\mathbf{x}$ 2

$1 + 2\,t\,B(\mathbf{x}\,,\ \mathbf{v}(1)) + t\,2\,B(\mathbf{x}\,,\ \mathbf{x})$



Also ist

d $q(\mathbf{y}(t))$

$= 2\, B(\mathbf{x}, \mathbf{v}(1)) = 0$.

dt

t=0

Deshalb hat die Funktion $t \to q(\mathbf{y}(t))$ im Punkt 0 kein Extremum. Es gibt also einen

Punkt t , so daß

$q(\mathbf{y}(t)) > q(\mathbf{y}(0))$

Nun ist aber $\mathbf{y}(0) = \mathbf{v}(1)$ und $\mathbf{y}(t) \in S\,2$; also haben wir einen Widerspruch zu (5.4).

✷

Wir setzen jetzt den Beweis von Satz 5.1 fort. Die Einschränkung von q auf $E \cap S\,2$

ist wieder eine stetige Funktion auf $E \cap S\,2$, nimmt also ihr Maximum an. Es gibt

also $\mathbf{v}(2) \in E \cap S\,2$, so daß

$\alpha\,2 := q(\mathbf{v}(2)) \geq q(\mathbf{x})$ für alle $\mathbf{x} \in E \cap S\,2$

$L := \{\mathbf{x} \in E \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}(2) = 0\} = \{\mathbf{x} \in \mathrm{R}3 \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}(1) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{v}(2) = 0\}$ ist dann eine Gerade **Bild 5.2**

durch **0**. Wie oben sieht man, daß

$B(\mathbf{x}, \mathbf{v}(2)) = 0$

für alle $\mathbf{x} \in L$.

(5.5)

L schneidet $S\,2$ in zwei Punkten. Nenne einen davon $\mathbf{v}(3)$ (vgl. Bild 5.2) und setze

$\alpha\,3 := q(\mathbf{v}(3))$. Nach Konstruktion ist

$\mathbf{v}(j) \in S$ 2

für $j = 1, 2, 3$,

$\mathbf{v}(i) \cdot \mathbf{v}(j) = 0$ für $i = j$,

und nach Lemma 91 und (5.5) ist

$B(\mathbf{v}(i), \mathbf{v}(j)) = 0$ für $i = j$

(5.6)

Deshalb ist für $\mathbf{x} = (x1, x2, x3) \in$ R3

$q(x1\mathbf{v}(1) + x2\mathbf{v}(2) + x3\mathbf{v}(3)) =$

=

$B(x1\mathbf{v}(1) + x2\mathbf{v}(2) + x3\mathbf{v}(3), x1\mathbf{v}(1) + x2\mathbf{v}(2) + x3\mathbf{v}(3))$

=

$x2$

2

2

$1\, B(\mathbf{v}(1), \mathbf{v}(1)) + x2\, B(\mathbf{v}(2), \mathbf{v}(2)) + x3\, B(\mathbf{v}(3), \mathbf{v}(3))$ 3

+

$xixjB(\mathbf{v}(i), \mathbf{v}(j))$

$i,j=1$

$i= j$

=

α

2

2

2

$1\,x\,1 + \alpha\,2\,x\,2 + \alpha\,3\,x\,3$

Damit ist Satz 5.1 bewiesen.

✷

Bemerkung 92 Sind $\mathbf{v}(1)$, $\mathbf{v}(2)$, $\mathbf{v}(3)$ die Vektoren aus Satz 5.1, so ist

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{v}(j) = \alpha j \cdot \mathbf{v}(j)$ für $j = 1, 2, 3$

(5.7)

Wir beweisen (5.7) für $j = 1$. Nach (5.6) sind sowohl $\mathbf{v}(1)$ als auch $\mathbf{Av}(1)$ Lösungen

der beiden Gleichungen

$\mathbf{v}(2) \cdot \mathbf{x} = 0$, $\mathbf{v}(3) \cdot \mathbf{x} = 0$

Dieses Gleichungssystem hat einen eindimensionalen Lösungsraum, also ist $\mathbf{Av}(1) =$

$\lambda\mathbf{v}(1)$ für ein $\lambda \in \mathrm{R}$.

Nun ist

$\alpha\,1 = q(\mathbf{v}(1)) = \mathbf{v}(1) \cdot \mathbf{Av}(1) = \lambda\mathbf{v}(1) \cdot \mathbf{v}(1) = \lambda$

✷

Ist allgemein $\mathbf{B}$ eine $(n \times n)$-Matrix, $\mathbf{v} \in \mathrm{R}\,n \setminus \{\mathbf{0}\}$ und $\lambda \in \mathrm{R}$, so daß $\mathbf{B} \cdot \mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$,

so sagt man, **v** sei ein *Eigenvektor* von **B** und λ der zugehörige *Eigenwert* . Satz

5.1 zeigt also, daß es für jede symmetrische (3×3)-Matrix **A** eine Orthonormalbasis

von R3 gibt, die aus Eigenvektoren von **A** besteht.

Korollar 93 *Ist q eine quadratische Form in drei Variablen, so gibt es eine Drehung*

R um eine Achse durch **0** *und* α 1 ,α 2 ,α 3 ∈ R *so daß*

($q \circ R$)(**x**) = α

2

2

2

1 x 1 + α 2 x 2 + α 3 x 3

f

ur alle **x** ∈ R3

256

5 Quadriken in R3

Beweis Nach Satz 5.1 gibt es eine Orthonormalbasis **v**(1), **v**(2), **v**(3) und α 1 ,α 2 ,α 3 ∈

R, so daß

q(x

2

2

2

1**v**(1) + x 2**v**(2) + x 3**v**(3)) = α 1 x 1 + α 2 x 2 + α 3 x 3 .

Sei **e**1 := (1 , 0 , 0) , **e**2 := (0 , 1 , 0) , **e**3 := (0 , 0 , 1). Die Vektoren **e**1 , **e**2 , **e**3 bilden ebenfalls eine Orthonormalbasis von R3. Wähle zunächst eine Drehung R 1 so, daß R 1(**e**1) =

v(1). Dann stehen R 1(**e**2) und R 1(**e**3) senkrecht auf **v**(1) = R 1(**e**1), liegen also in der Ebene E senkrecht zu **v**(1) (vgl. Bild 5.3). Somit gibt es eine Drehung R 2 um die

e3

R (e)=v(1)

1

1

v(3)

R (e)

1

3

e2

v(2)

e1

R (e)

1

2

Bild 5.3

von $\mathbf{v}(1)$ aufgespannte Achse $\mathrm{R} \cdot \mathbf{v}(1)$, die $R\,1(\mathbf{e}2)$ auf $\mathbf{v}(2)$ abbildet. Sei $R := R\,2 \circ R\,1$.

Nach Satz 1.6 ist die Abbildung R eine Drehung um eine Achse durch $\mathbf{0}$. Nun ist

$R(\mathbf{e}1) = \mathbf{v}(1)$,$R(\mathbf{e}2) = \mathbf{v}(2)$, und $R(\mathbf{e}3)$ steht senkrecht auf $\mathbf{v}(1)$ und $\mathbf{v}(2)$. Folglich ist $R(\mathbf{e}3) = \pm\mathbf{v}(3)$. Da Drehungen um Achsen durch $\mathbf{0}$ lineare Abbildungen sind, ist

$(q \circ R)(\mathbf{x}) = q\,(R(x\,1\mathbf{e}1 + x\,2\mathbf{e}2 + x\,3\mathbf{e}3))$

$=$

$q\,(x\,1\,R(\mathbf{e}1) + x\,2\,R(\mathbf{e}2) + x\,3\,R(\mathbf{e}3))$

$=$

$q(x\,1\mathbf{v}(1) + x\,2\mathbf{v}(2) + x\,3\mathbf{v}(3))$

$=$

α

2

2

2

$1\,x\,1 + \alpha\,2\,x\,2 + \alpha\,3\,x\,3$.

✷

Bemerkung 94 Im Beweis von Korollar 93 haben wir den Satz 1.6 verwendet,

der besagt, daß die Hintereinanderschaltung zweier Drehungen um Achsen durch **0**

wieder eine Drehung um eine Achse durch **0** ist (Einen zweiten Beweis dieses Satzes

geben wir am Anfang von Kapitel 6). Wenn man diese Ergebnisse nicht verwenden

möchte, so kann man in der Formulierung von Korollar 93 das Wort

Drehung *R* “

”

durch Abbildung *R*, die Hintereinanderschaltung von Drehungen um Achsen durch

”

0 ist“, ersetzen.

.

.

.

.

Bemerkung 95 Die Resultate dieses Abschnitts – mit Ausnahme von Bemerkung

94 – übertragen sich wortwörtlich auf quadratische Formen in *n* Variablen. Der

Beweis von Satz 5.1 kann – der hier beschriebenen Linie folgend – durch Induk-

tion geführt werden (vgl. z.B. [Klingenberg], Theorem 6.5.7, [Roe], 10.3). Für einen

algebraischen Beweis des Satzes 5.1, der das Argument im Beweis von Lemma 56

verallgemeinert, siehe z.B. [Fischer] 1.5.9.

5.2

Normalformen

Wir sagen, zwei Quadriken Q,Q in R3 seien *(euklidisch) äquivalent*, falls es eine

Abbildung F : R3 $-\rightarrow$ R3 gibt, die Hintereinanderschaltung

$F = F1 \circ \cdots \circ Fn$

von Abbildungen Fj ist, von denen jede entweder eine Translation oder eine Drehung

um eine Achse durch **0** ist, so daß

$F(Q) = Q$.

Im ersten Teil von Bemerkung 4 (Seite 15) haben wir gesehen, daß die Abbildun-

gen F der obigen Gestalt genau die orientierungserhaltenden Isometrien des Raumes

sind. Da wir die Diskussion hier unabhängig von den Resultaten von Kapitel 1 halten

wollen, wählen wir die obige, etwas kompliziertere Definition (vgl. auch Bemerkung

95).

..

Ubung: Zeigen Sie:

i) Ist F : R3 $\rightarrow$ R3 eine Drehung um eine Achse durch **0** oder eine

Translation und Q eine Quadrik in R3, so ist $F(Q)$ wieder eine

Quadrik!

ii) Abbildungen F wie oben sind bijektiv!

Wie in Satz 4.1 geben wir nun eine Liste von Quadriken an, so daß jede beliebige Quadrik in R3 zu einer der Quadriken aus dieser Liste äquivalent ist.

(5.8.1) Für $a_1, a_2, a_3 > 0$ sei

2

x_2

x_2

E

2

3

a

:=

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 +$

+

= 1

$_1, a_2, a_3$

a_2

2

2

1

a_2

a_3

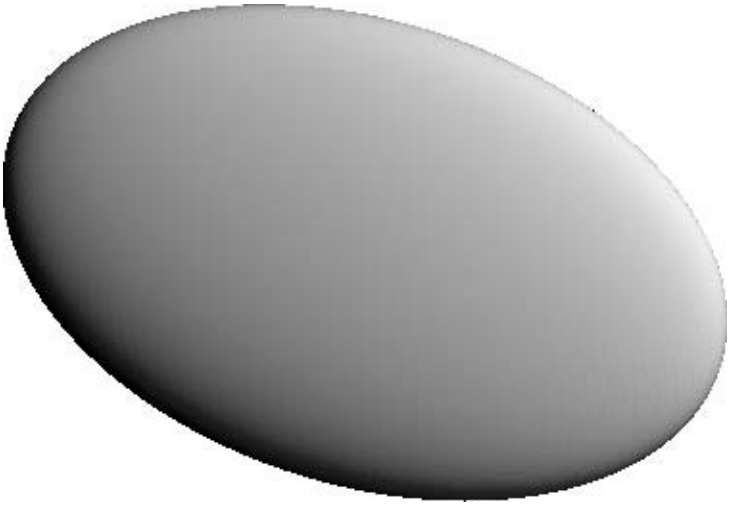
Eine Quadrik, die zu einer der Quadriken Ea_1, a_2, a_3 äquivalent ist, heißt *Ellip-*

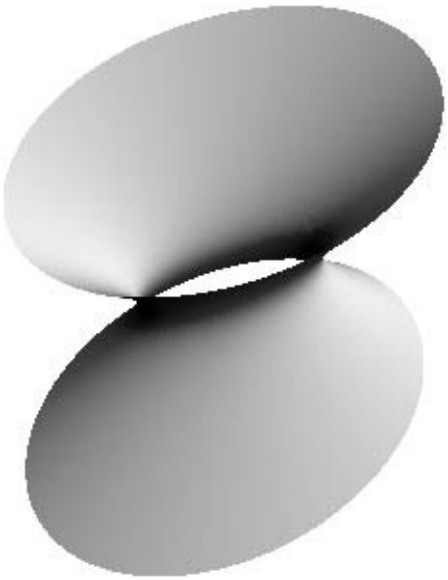
soid (siehe Bild 5.4). Falls $a_1 = a_2 = a_3$, so ist Ea_1, a_2, a_3

die Sphäre mit Radius

a_1 um **0**. Falls zwei der a_i gleich sind, nennt man Ea_1, a_2, a_3

ein Rotationsellipsoid.





258

5 Quadriken in R3

Bild 5.4 Ellipsoid

(5.8.2) Für a 1 ,a 2 ,a 3 > 0 sei

x 2

x 2

x 2

H(1)

:=

x ∈ R3 | 1 + 2 − 3 = 1

a 1 ,a 2 ,a 3

a 2

2

2

1

a 2

a 3

Bild 5.5 Einschaliges Hyperboloid

Eine Quadrik, die zu $H(1)$

a 1 ,a 2 ,a 3 äquivalent ist, heißt *einschaliges Hyperboloid*

(siehe Bild 5.5).

(5.8.3) Für a 1 ,a 2 ,a 3 > 0 sei

2

2

2

$H(2)$

:=

x ∈ R3 | x 1 − x 2 − x 3 = 1

a 1 ,a 2 ,a 3

a 2

2

2

1

a 2

a 3

Eine Quadrik, die zu H(2)

a 1 ,a 2 ,a 3 äquivalent ist, heißt *zweischaliges Hyperboloid*

(siehe Bild 5.6).

(5.8.4) Für a 1 ,a 2 > 0 sei

x 2

x 2

P (+) :=

x ∈ R3 | x

1

+

2

a 1 ,a 2

3 = a 2

2

1

a 2

.

.

.

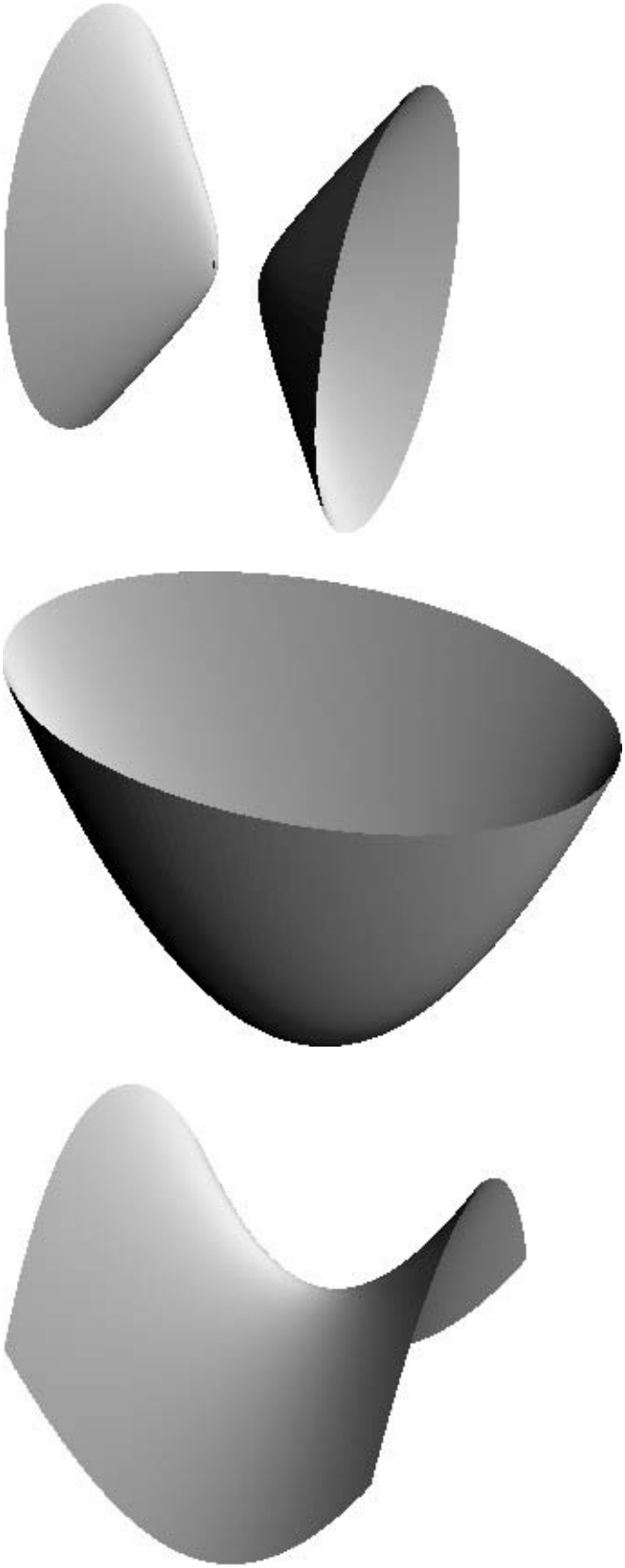


Bild 5.6 Zweischaliges Hyperboloid

Bild 5.7 Elliptisches Paraboloid

Eine Quadrik, die zu P (+)

a 1 ,a 2 äquivalent ist, heißt *elliptisches Paraboloid* (siehe

Bild 5.7).

(5.8.5) Für a 1 ,a 2 > 0 sei

x 2

2

P (−) :=

x ∈ R3 | x

1

− x 2

a 1 ,a 2

3 = a 2

2

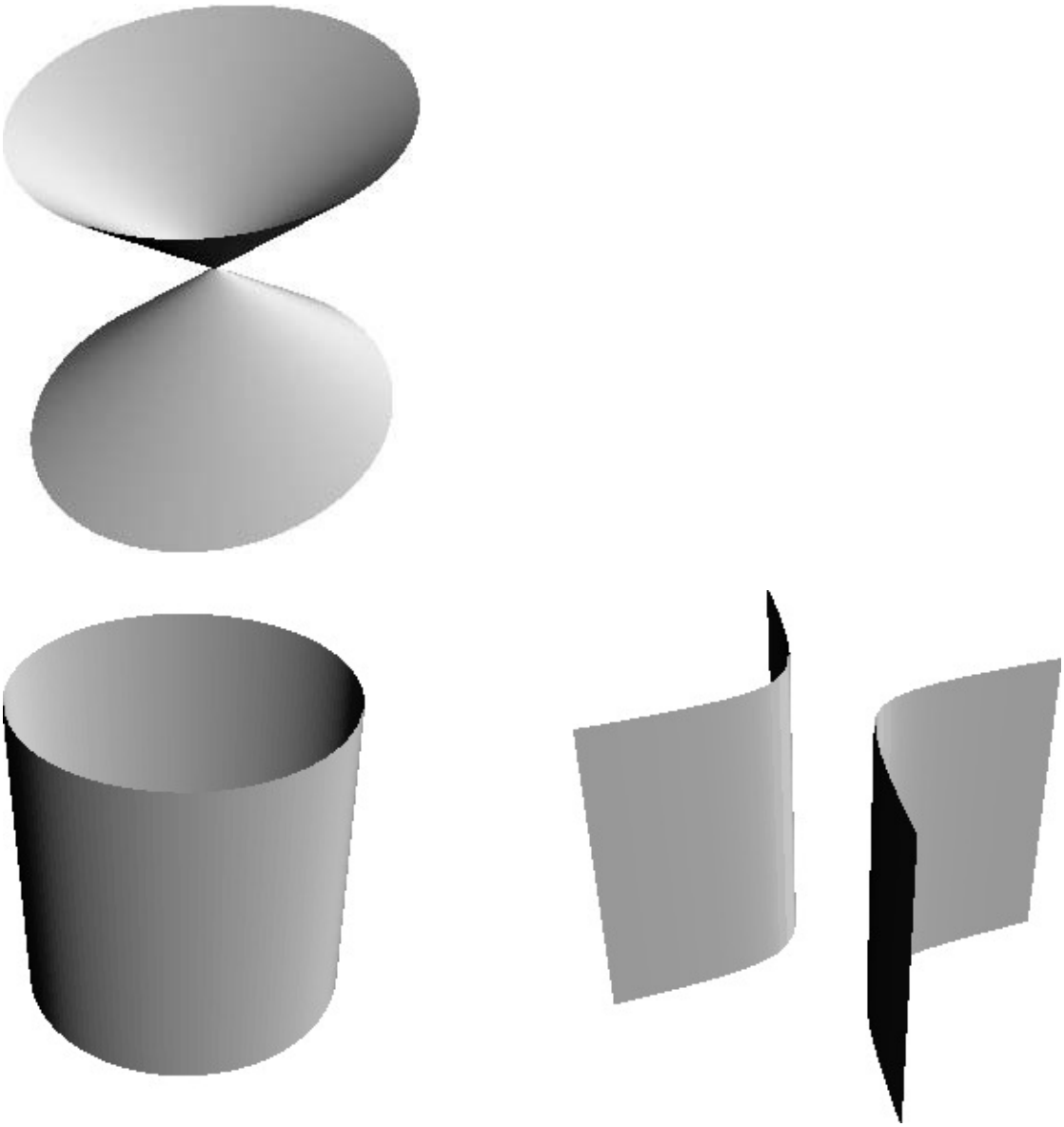
1

a 2

Bild 5.8 Hyperbolisches Paraboloid

Eine Quadrik, die zu P (−)

a_1, a_2 äquivalent ist, heißt *hyperbolisches Paraboloid* (siehe Bild 5.8).



5 Quadriken in R3

(5.8.6) Für $a_1, a_2 > 0$ sei

x_2

x_2

K

2

1

2

a

:=

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x$

=

+

$1, a_2$

3

a_2

2

1

a_2

Eine Quadrik, die zu K_{a_1, a_2} äquivalent ist, heißt (quadratischer) *Kegel* (siehe

Bild 5.9 Kegel

Bild 5.9).

(5.8.7) Eine Quadrik, die zu der einpunktigen Menge

x 2

x 2

x 2

$\{\mathbf{0}\} := \mathbf{x} \in$ R3 | 1 + 2 + 3 = 0

a 2

2

2

1

a 2

a 3

äquivalent ist, nennen wir *Einsiedlerpunkt*.

(5.8.8) Ist C ein Kegelschnitt in R2, so nennt man eine zu

(x 1 ,x 2 ,x 3) ∈ R3 | (x 1 ,x 2) ∈ C

äquivalente Quadrik einen *Zylinder* über dem Kegelschnitt C (siehe Bild 5.10).

Bild 5.10 *Links*: Zylinder über Ellipse — *rechts*: Zylinder über Hyperbel

.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.

5.2 Normalformen

261

Satz 5.2 *Jede nichtleere Quadrik in* R3 *ist zu einer der Quadriken (5.8.1)–(5.8.8)*

..

aquivalent.

Beweis Sei *Q* eine Quadrik in R3. Nach Korollar 93 ist *Q* äquivalent zu einer Quadrik

Q der Form

Q = **x** ∈ R3 | *α*

2

2

2

1 *x* 1 + *α* 2 *x* 2 + *α* 3 *x* 3 + *b* 1 *x* 1 + *b* 2 *x* 2 + *b* 3 *x* 3 + *c* mit *α* 1 ,*α* 2 ,*α* 3 ,*b* 1 ,*b* 2 ,*b* 3 ,*c* ∈ R , (*α* 1 ,*α* 2 ,*α* 3) = (0 , 0 , 0) .

1. Fall : α 1 ,α 2 ,α 3 sind alle drei von Null verschieden:

Sei T : R3 − → R3 die Translation

b

b

b

(x

1

2

3

1 ,x 2 ,x 3) →

x 1 + 1 / 2

,x

,x

α

2 + 1 / 2

3 + 1 / 2

1

α 2

α 3

Dann gibt es c ∈ R so, daß

T (Q) = **x** ∈ R3 | α

2

2

2

$1\ x\ 1 + \alpha\ 2\ x\ 2 + \alpha\ 3\ x\ 3$

$= c$

Fall 1a: $c = 0$: In diesem Fall ist

α

α

$T\ (\ Q\ ) =$

$\mathbf{x} \in R3 \mid \alpha\ 1\ x\ 2 + 2\ x\ 2 + 3\ x\ 2 = 1$

c

1

c

2

c

3

Indem man Drehungen um 90 ◦ um die Koordinatenachsen durchführt, kann man die

Rollen von α 1, α 2, α 3 paarweise vertauschen. Deshalb können wir annehmen, daß

$\alpha\ 1 \geq \alpha\ 2 \geq \alpha\ 3$.

c

c

c

Wir setzen

c

$aj :=$

,

$j = 1 , 2 , 3 .$

αj

Falls $\alpha 3 > 0$, so ist die Quadrik $\{\mathbf{x} \in R3 \mid \alpha 1 x 2 + \alpha 2 x 2 + \alpha 3 x 2 = 1 \}$ gleich
c

c

1

c

2

c

3

dem Ellipsoid Ea

, also ist Q

$1 ,a 2 ,a 3$

äquivalent zu diesem Ellipsoid. Ebenso ist für

$\alpha 2 > 0 > \alpha 3$ die Quadrik Q zu dem einschaligen Hyperboloid $H(1)$

äquivalent,

c

c

a_1, a_2, a_3

und für $\alpha_1 > 0 > \alpha_2$ ist Q zum zweischaligen Hyperboloid $H(2)$

äquivalent.

c

c

a_1, a_2, a_3

Wäre $0 > \alpha_1$, so wäre $T(Q)$ und somit auch Q die leere Menge.

c

Fall 1b: $c = 0$: Dann ist $T(Q) =$

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha$

2

2

2

$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$

$= 0$. Falls

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ dasselbe Vorzeichen haben, ist $T(Q)$ und somit auch Q ein Einsiedlerpunkt. Ansonsten können wir — indem wir eventuell die Gleichung von $T(Q)$

mit (-1) multiplizieren — annehmen, daß zwei der drei Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

posi-

tiv sind, und die dritte negativ. Da man mittels Drehungen um 90 ◦ um die Ko-

ordinatenachsen die Rollen von α 1, α 2, α 3 paarweise vertauschen kann, können

wir annehmen, daß α 1 ≥ α 2 > 0 ≥ α 3. Somit ist Q äquivalent zu der Quadrik

x ∈ R3 | α

2

2

2

1 x 1 + α 2 x 2

= |α 3 | x 3 . Dies ist der Kegel Ka

mit a

|,

1 ,a 2

1 :=

|α 3

α 1

a 2 :=

|α 3 |.

α 2

.

.

.

.

.

.

.

.

2. Fall : Genau zwei der drei Zahlen α 1, α 2, α 3 sind von Null verschieden: Indem wir

wieder Drehungen mit Winkel 90 ◦ um die Koordinatenachsen durchführen, können

wir annehmen, daß

α 1 ,α 2 = 0 und α 3 = 0 .

Sei jetzt T : R3 → R3 die Translation

b

b

(x

1

2

1 ,x 2 ,x 3) →

x 1 + 1 / 2

,x

,x

α

2 + 1 / 2

3

1

α 2

Dann gibt es $c \in$ R, so daß

T (Q) = **x** $\in$ R3 | α

2

2

1 x 1 + α 2 x 2 + b 3 x 3 + c = 0

Falls b 3 = 0, ist T (Q) der Zylinder über dem Kegelschnitt

(x

2

2

1 ,x 2) $\in$ R2 | α 1 x 1 + α 2 x 2 + c = 0

.

Wir betrachten nun die Situation b 3 = 0. Sei T : R3 $\rightarrow$ R3 die Translation

c

(x 1 ,x 2 ,x 3) $\rightarrow$ (x 1 ,x 2 ,x 3 +

) .

b 3

Q := ($T \circ T$)(Q) ist dann die Quadrik

$Q = \mathbf{x} \in R3 \mid \alpha$

2

2

$1\, x\, 1 + \alpha\, 2\, x\, 2$

$= x\, 3$,

wobei $\alpha\, 1 := -\alpha\, 1$, α

. Falls sowohl α

$b\, 3$

$2 := -\alpha\, 2$

$b\, 3$

1 als auch α 2 negativ sind, wenden

wir die Drehung um 180 ◦ um die x 1-Achse (x 1 ,x 2 ,x 3) → (x 1 , − x 2 , − x 3) an, um zu sehen, daß Q zu einer Quadrik

˜

$Q = \mathbf{x} \in R3 \mid$ ˜

α

2

2

$1\, x\, 1 +$ ˜

$\alpha\, 2\, x\, 2 = x\, 3$

(˜

α 1 , ˜

α 2 = 0)

äquivalent ist, wobei mindestens eine der beiden Zahlen ˜

α 1, ˜

α 2 positiv ist. Indem wir

eventuell die Drehung um 90 ◦ um die x 3-Achse anwenden, können wir annehmen,

daß ˜

α 1 ≥ ˜

α 2. Setze

1

αj :=

j = 1 , 2 .

| ˜

αj|

Falls ˜

α 2 > 0, so ist ˜

Q das elliptische Paraboloid P (+)

a

, falls ˜

α

1 ,a 2

2 < 0, so ist ˜

Q das

hyperbolische Paraboloid P (−)

a

.

1 ,a 2

3. Fall : Zwei der drei Zahlen α 1, α 2, α 3 sind Null:

Wie oben können wir annehmen, daß α 1 = 0, α 2 = α 3 = 0. Also ist

Q = **x** ∈ R3 | α

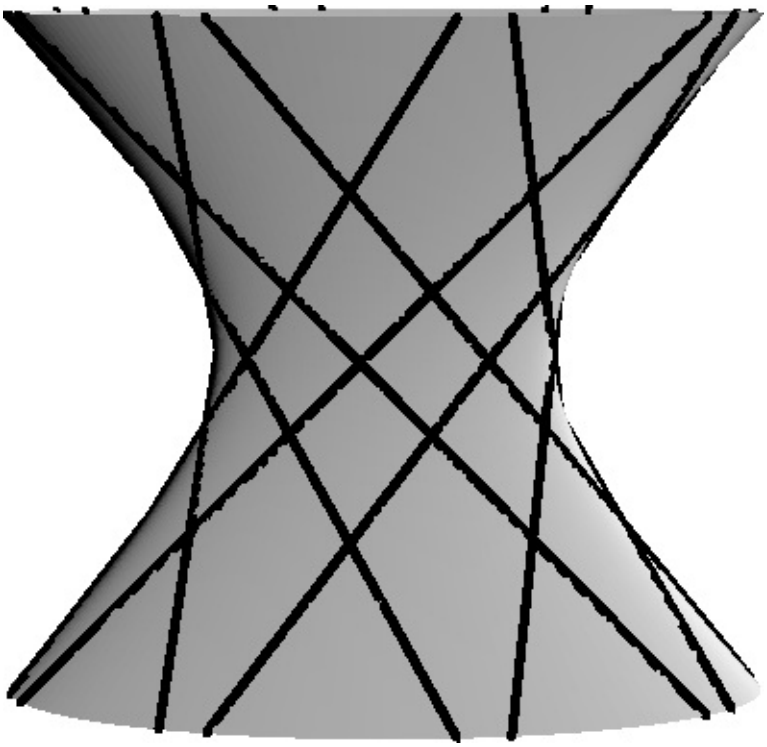
2

1 x 1 + b 1 x 1 + b 2 x 2 + b 3 x 3 + c = 0

.

Nun gibt es eine Drehung R um die x 1-Achse und b 2 ∈ R so, daß

b · (R− 1**x**) = b 1 x 1 + b 2 x 2 .



5.3 Geraden auf einem einschaligen Hyperboloid

263

Dann ist

$R(Q) = \mathbf{x} \in \mathrm{R}3 \mid \alpha$

2

$1\, x\, 1 + b\, 1\, x\, 1 + b\, 2\, x\, 2 + c = 0$

der Zylinder über dem Kegelschnitt

$\{(x$

2

$1\, ,x\, 2) \in \mathrm{R}2 \mid \alpha\, 1\, x\, 1 + b\, 1\, x\, 1 + b\, 2\, x\, 2 + c = 0\ \}$.

Damit ist Satz 5.2 bewiesen.

✷

5.3

Geraden auf einem einschaligen Hyperboloid

In diesem Abschnitt beweisen wir, daß es – wie in Bild 5.11 angedeutet – auf einem

einschaligen Hyperboloid zwei Einparameterscharen von Geraden gibt, die das Hy-

perboloid überstreichen. Zunächst benötigen wir einige Begriffe.

Bild 5.11

Definitionen: Eine *Gerade* in R3 ist eine Teilmenge der Form

$g = \{\mathbf{x} + t\,\mathbf{v} \mid t \in \mathrm{R}\}$,

wobei $\mathbf{x}$, $\mathbf{v} \in$ R3 und $\mathbf{v} = 0$.

..

Ubung: Läßt sich eine Gerade g in der Gestalt $g = \{\mathbf{x} + t\,\mathbf{v} \mid t \in \mathrm{R}\}$ und in der Gestalt $g = \{\mathbf{x} + t\,\mathbf{w} \mid t \in \mathrm{R}\}$ schreiben, so gibt es $\lambda \in$ R, $\lambda = 0$, so daß $\mathbf{w} = \lambda\,\mathbf{v}$!

.

.

.

.

Die obige Übung zeigt, daß bei einer Geraden $\{\mathbf{x} + t\,\mathbf{v} \mid t \in \mathrm{R}\}$ der Vektor $\mathbf{v}$

bis auf einen Skalar durch die Gerade bestimmt ist. Er heißt *Richtungsvektor*

der Geraden.

Zwei Geraden $\{\mathbf{x} + t\,\mathbf{v} \mid t \in \mathrm{R}\}$ und $\{\mathbf{y} + t\,\mathbf{w} \mid t \in \mathrm{R}\}$ heißen *parallel*, wenn es λ

∈ R gibt, so daß **w** = λ **v**.

..

Ubung: Zeigen Sie, daß parallele Geraden entweder gleich oder disjunkt sind!

Man nennt zwei Geraden *windschief*, wenn sie sich nicht schneiden und nicht

parallel sind (vgl. Bild 5.12).

2cm

Bild 5.12

Das zentrale Thema dieses Abschnitts ist der folgende Satz, sowie die Konsequen-

zen und Weiterungen, die sich aus ihm ergeben.

Satz 5.3 *Durch jeden Punkt eines einschaligen Hyperboloids gehen genau zwei Ge-*

raden, die ganz in diesem Hyperboloid enthalten sind.

Beweis Zunächst können wir annehmen, daß das einschalige Hyperboloid eines der

Hyperboloide

2

x 2

2

H(1)

=

x ∈ R3 | *x* 1 + 2 − *x* 3 = 1

a_1, a_2, a_3

a_2

2

2

1

a_2

a_3

mit $a_1, a_2, a_3 > 0$ ist. Um die Rechnungen zu vereinfachen, betrachten wir die Abbil-

dung

$\Psi :$

$\mathbb{R}^3$

$\longrightarrow$

$\mathbb{R}^3$

(5.9)

$$(x_1, x_2, x_3) \to (a_1 x_1, a_2 x_2, a_3 x_3)$$

Sie ist bijektiv, führt Geraden in Geraden über, und bildet das Hyperboloid

$H := H$

2

2

2

1 , 1 , 1 =

$\mathbf{x} \in \mathrm{R}3 \mid x\,1 + x\,2 - x\,3 = 1$

bijektiv auf Ha

ab. Deshalb gen

$1\ ,a\ 2\ ,a\ 3$

ügt es, Satz 5.3 nur für das Hyperboloid H zu

beweisen. Man beachte, daß jede Drehung um die x 3-Achse das Hyperboloid H in

sich überführt.

Sei nun $\mathbf{x}$ ein Punkt von H. Nach einer Drehung um die x 3-Achse können wir

annehmen, daß $x\,2 = 0$. Ist $\mathbf{v} \in \mathrm{R}3$, $\mathbf{v} = 0$, so ist die Gerade

.

.

.

.

5.3 Geraden auf einem einschaligen Hyperboloid

265

$\{\mathbf{x} + t\,\mathbf{v} \mid t \in \mathrm{R}\}$

genau dann ganz in H enthalten, wenn für alle $t \in \mathrm{R}$

$(x\,1 + t\,v\,1)2 + (t\,v\,2)2 - (x\,3 + t\,v\,3)2 = 1$.

Das ist genau dann der Fall, wenn für alle $t \in \mathrm{R}$

$x\,2$

2

2

2

2

$1 - x_3 + 2t(x_1 v_1 - x_3 v_3) + t_2(v_1 + v_2 - v_3) = 1$.

Da x_2

2

$1 - x_3$

= 1, ist dies wiederum äquivalent zu

(5.10.1)

$x_1 v_1 - x_3 v_3 = 0$ und

(5.10.2)

v_2

2

2

$1 + v_2$

$= v_3$

Wir suchen nach Lösungen $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) = (0, 0, 0)$ der Gleichungen (5.10.1) und (5.10.2). Aus (5.10.2) sieht man, daß für jede Lösung $v_3 = 0$. Da die Geraden $\{\mathbf{x} + t\,\mathbf{v} \mid$

$t \in \mathrm{R}\}$ und $\{\mathbf{x} + t\,\mathbf{v} \mid t \in \mathrm{R}\}$ genau dann gleich sind, wenn sich die Richtungsvektoren nur um einen skalaren Faktor unterscheiden, können wir die Lösungen von (5.10.1)

und (5.10.2) so normieren, daß

(5.10.3)

$v\ 3 = 1$

Diese Gleichungen sind dann äquivalent zu

(5.11.1)

$x\ 1\ v\ 1 = x\ 3$ und

(5.11.2)

$v\ 2$

2

$1 + v\ 2$

$= 1$

mit $v\ 3 = 1$. Die Lösungen von (5.11.1) und (5.11.2) entsprechen bijektiv den Geraden

durch **x**, die ganz in H enthalten sind. Da $x\ 2 - x\ 2 = 1$, ist

1

3

$x\ 3 < 1$

$x\ 1$

Also hat das Gleichungssystem (5.11) als Lösungen gerade

x

$(v\pm, v\pm) =$

$3\ , \pm 1$

(5.12)

1

2

x 1

x 1

✷

Wir wollen die Geraden auf H noch etwas genauer betrachten. Sei $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$

ein beliebiger Punkt von H und $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ Richtungsvektor einer in H enthaltenen Geraden durch x. Es gibt $\alpha > 0$, so daß die Drehung

$R : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

(x_1, x_2, x_3)

$\rightarrow (x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha, x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha, x_3)$

.

.

.

um die x_3-Achse mit Winkel α den Punkt $\mathbf{x}$ auf einen Punkt $\mathbf{x} = R\mathbf{x}$ mit $x =$

2

0 , $x > 0$ abbildet. Dann ist $\mathbf{v} = R\mathbf{v} = (v$

1

$1 \cos\alpha - v_2 \sin\alpha, v_1 \sin\alpha + v_2 \cos\alpha, v_3)$

Richtungsvektor einer der beiden in H enthaltenen Geraden durch $\mathbf{x}$. Wir können

deshalb wieder annehmen, daß v 3 = v = 1. Nach (5.12) ist

3

x

1

(v , v) =

3 , ±

1

2

x

x

1

1

Folglich ist

(

\ (

\

(

\

(

⎞

x_1

v_2

x_1

v_2

x

⎛

⎟⎛

⎟

⎛

⎟

⎛

⎟

$1 v_2 - x_2 v_1$

$=$

x_2

$\cdot$

$-v_1$

$= R$

x_2

$\cdot R$

$-v$ 1

0

1

0

1

⎛

⎜ ⎛

⎜

x

v

1

2

=

⎝ 0 ⎠ · ⎝ $-v$ ⎠ = x v = ± 1

1

1 2

0

1

Also hat eine der beiden in H enthaltenen Geraden durch **x** einen Richtungsvektor

v+ = (v+ ,v+ , 1) mit x

− x

> 0, und die andere einen Richtungsvektor

1

2

1 v+

2

2 v+

1

v − = (v−,v−, 1) mit x

− x

< 0. Die erste Gerade nennen wir g+, die zweite

1

2

1 v−

2

2 v−

1

g−.

Jeder Punkt **y** von g+ ist von der Form **y** = **x** + λ**v**+ mit $\lambda \in$ R, also ist

y 1 v+ − y

= (x

) $v+ - (x$

) $v+ = x$

$- x$

> 0

2

2 $v+$

1

1 + $\lambda v+$

1

2

2 + $\lambda v+$

2

1

1 $v+$

2

2 $v+$

1

für jeden Punkt **y** $\in g+$. Ebenso ist für jeden Punkt $z \in g-$

z 1 $v- - z$

< 0 .

2

2 $v-$

1

Wir können also die Menge G aller Geraden, die ganz in H enthalten sind, in zwei

Teile teilen, nämlich die Menge $G+$ aller Geraden g in G, die einen Richtungsvektor

der Form (v 1 ,v 2 , 1) haben, so daß y 1 v 2 − y 2 v 1 > 0 für alle **y** ∈ g, und die Menge $G-$

aller Geraden g in G, die einen Richtungsvektor der Form (v 1 ,v 2 , 1) haben, so daß

y 1 v 2 − y 2 v 1 < 0 für alle **y** ∈ g. Die obige Diskussion zeigt:

Bemerkung 96 Durch jeden Punkt **x** ∈ H geht genau eine Gerade aus dem System

$G+$ und eine Gerade aus dem System $G-$.

Bemerkung 97 Der Ausdruck x 1 v 2 − x 2 v 1 kann auch geschrieben werden als

(

)

x 1 v 1 0

x

)

(

1 v 2 − x 2 v 1 = det

x 2 v 2 0

x 3

1

1

Also ist

⎛

⎝

⎛

⎝

x 1 v+ 0

x

0

1

1

v−

1

det ⎞ x

⎠

⎞

⎠

2

v+

0

> 0

und

det

x

0

< 0 ,

2

2

$v-$

2

x 3

1

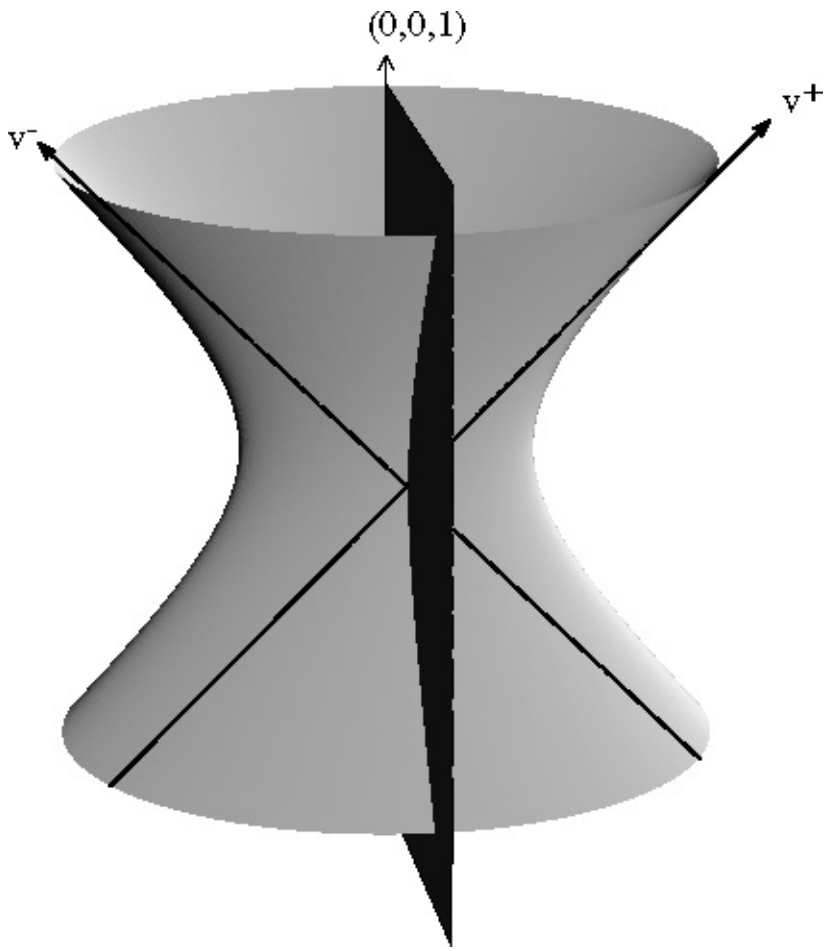
1

x 3

1

1

.



5.3 Geraden auf einem einschaligen Hyperboloid

wenn **v**+ , **v** − wie oben die Richtungsvektoren der Geraden $g+ \in G+$, bzw. $g- \in G-$

durch **x** sind. Geometrisch bedeutet dies (vgl. Bild 5.13), daß die Vektoren **v**+ und

v − auf verschiedene Seiten der von **x** und dem Vektor (0 , 0 , 1) aufgespannten Ebene

zeigen (vgl. Abschnitt 2.2).

Bild 5.13

Als nächstes zeigen wir

Lemma 98 *Seien g und g verschiedene Geraden, die ganz in H enthalten sind.*

Falls g und g beide zu G+ oder beide zu G− gehören, so sind g und g windschief.

Falls eine der beiden Geraden in G+ und die andere in G− liegt, so sind g und g

parallel oder sie schneiden sich in einem Punkt.

Beweis Da jede Gerade aus G einen Richtungsvektor der Gestalt (v 1 ,v 2 , 1) hat, trifft

sie die Ebene $\{\mathbf{x} \in$ R3 | x 3 = 0 $\}$. Wir können also g bzw. g in der Form

g

=

$\{(x 1 ,x 2 , 0) + t (v 1 ,v 2 , 1) \mid t \in$ R $\}$

g

=

$\{(x 1 ,x 2 , 0) + t (v 1 ,v 2 , 1) \mid t \in$ R $\}$

mit x 2

2

2

2

1 + x 2

= 1, x 1 + x 2 = 1 schreiben. g ist in H enthalten genau dann, wenn

x 1 v 1 + x 2 v 2 = 0 und

v 2

2

1 + v 2

=

1

Somit ist

(v 1 ,v 2) = ±(−x 2 ,x 1)

Das Vorzeichen + entspricht $g \in G+$, das Vorzeichen − entspricht $g \in G-$. Ebenso

ist

(v 1 ,v 2) = ±(−x 2 ,x 1)

.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.

Sind g,g beide aus $G+$, so sind die Richtungsvektoren **v** und **v** nicht proportional,

wenn immer **x** = **x** . Also sind in diesem Fall g und g nicht parallel. Für einen

Schnittpunkt **p** wäre Bemerkung 96 verletzt, denn sowohl g als auch g wären Ge-

raden aus dem System $G+$, die durch **p** gingen. Also sind g und g windschief.

Ebenso zeigt man, daß g und g windschief sind, wenn beide in $G-$ liegen.

Schließlich betrachten wir den Fall, daß $g \in G+$, $g \in G-$. Dann ist

$\mathbf{v} = (-x_2 , x_1 , 1)$ und $\mathbf{v} = (x_2 , -x_1 , 1)$.

Ist $\mathbf{x} = -\mathbf{x}$, so ist $\mathbf{v} = \mathbf{v}$ und somit sind g und g parallel. Ansonsten gibt es $t \in \mathrm{R}$, so daß

$$(x_1 , x_2 , 0) + t\,\mathbf{v} = (x_1 , x_2 , 0) + t\,\mathbf{v} .$$

(5.13)

In der Tat, (5.13) ist äquivalent zu

$$x_1 - x_1 = t (x_2 + x_2)$$

und

$$x_2 - x_2 = -t(x_1 + x_1) .$$

Ist $x_2 = -x_2$ und $x_1 = x_1$, so löst $t := -x_2$ diese beiden Gleichungen (da wir **x** =

x_1

$-\mathbf{x}$ voraussetzen, ist $x_1 = 0$). Ist $x_2 = -x_2$, so löst $t := (x_1 - x_1) /(x_2 + x_2)$ offenbar die erste der beiden obigen Gleichungen. Es löst aber auch die zweite Gleichung, denn

2 −

2

$-x_1 - x_1$

x

(x

1

x

$1 + x\ 1\ )$

$=$

$-x\ 1$

$2 + x\ 2$

$x\ 2 + x\ 2$

$2) - (1 - x\ 2)$

$x\ 2 - x\ 2$

$= - (1 - x\ 2$

2

$=$

2

2

$= x$

x

$2 - x\ 2\ .$

$2 + x\ 2$

$x\ 2 + x\ 2$

(5.13) zeigt, daß sich g und g im Punkt $(\ x\ 1\ ,x\ 2\ ,\ 0) + t\ \mathbf{v}$ schneiden.

✷

Die in Bemerkung 96 und Lemma 98 erzielten Resultate lassen sich mit Hilfe der

in (5.9) definierten Abbildung Ψ direkt auf die Hyperboloide $H(1)$

a

übertragen.

$1\ ,a\ 2\ ,a\ 3$

Wir fassen sie noch einmal zusammen:

Proposition 99 *Sei G die Menge der Geraden, die ganz in dem einschaligen Hy-*

2

2

2

perboloid $H(1)$

$= \{\ \mathbf{x} \in \mathrm{R}3 \mid x\ 1$

$a\ 1\ ,a\ 2\ ,a\ 3$

$a\ 12 + x\ 2$

$a\ 22 - x\ 3$

$a\ 32 = 1\ \}$ *enthalten sind. G+ bzw.*

G− bezeichne die Menge aller Geraden g in G, die einen Richtungsvektor $(\ v\ 1\ ,v\ 2\ ,\ 1)$

haben, so daß f¨

ur alle $\mathbf{y} \in g$

$y\ 1\ v\ 2 - y\ 2\ v\ 1 > 0$

(*bzw.* $y_1 v_2 - y_2 v_1 < 0$) .

Dann ist $G = G^+ \cup G^-$. *Durch jeden Punkt von* $H(1)$

geht genau eine Gerade

a_1, a_2, a_3

aus G^+ *und eine Gerade aus* G^-. *Zwei verschiedene Geraden* g, g , *die beide in* G^+

oder beide in G^- *liegen, sind stets windschief zueinander. Ist* $g \in G^+$ *und* $g \in G^-$,

so sind g *und* g *entweder parallel oder schneiden sich in einem Punkt.*

Bemerkungen 100

(i) Der Durchschnitt des Hyperboloids

2

x_2

2

$H(1)$

$= \{ \mathbf{x} \in \mathrm{R}3 \mid x_1 + 2 - x_3 = 1 \}$

a_1, a_2, a_3

a_2

2

2

1

a_2

a 3

.

.

.

.

.

.

5.3 Geraden auf einem einschaligen Hyperboloid

269

mit der Ebene

E := { **x** ∈ R3 | x 3 = 0 }

kann in offensichtlicher Weise mit der Ellipse

2

x 2

E

2

a

= { **x** ∈ R3 | x 1 +

= 1 }

1 ,a 2

a 2

2

1

a 2

identifiziert werden. Nach Proposition 99 gibt es für jeden Punkt **x** dieses

Durchschnitts Vektoren $\mathbf{v}+(\mathbf{x}) = (v+(\mathbf{x}), v+(\mathbf{x}), 1)$ und $\mathbf{v}-(\mathbf{x}) = (v-(\mathbf{x}), v-(\mathbf{x}), 1)$, 1

2

1

2

so daß die Geraden $g+(\mathbf{x}) = \{ \mathbf{x} + t\,\mathbf{v}+(\mathbf{x}) \mid t \in \mathrm{R} \}$ und $g-(\mathbf{x}) = \{ \mathbf{x} + t\,\mathbf{v}-(\mathbf{x}) \mid$

$t \in \mathrm{R} \}$ in $G+$ bzw. $G-$ liegen. Proposition 99 zeigt, daß die Abbildungen

$\Phi+$:

Ea

$\times \mathrm{R} \longrightarrow H(1)$

und

1 ,a 2

a 1 ,a 2 ,a 3

$(\mathbf{x}, t)$

$\longrightarrow \mathbf{x} + t\,\mathbf{v}+(\mathbf{x})$

$\Phi-$:

Ea

$\times \mathrm{R} \longrightarrow H(1)$

1 ,a 2

a 1 ,a 2 ,a 3

$(\mathbf{x}, t)$

$- \rightarrow \mathbf{x} + t\,\mathbf{v} - (\mathbf{x})$

bijektiv sind. Zusammen mit der Parametrisierung von Ellipsen aus Bemerkung 59.ii) ermöglicht es dies, die Punkte eines einschaligen Hyperboloids zu parametrisieren.

(ii) Aus Proposition 99 ergibt sich ein Verfahren, ein einschaliges Rotationshyper-

2

2

2

boloid, d.h. ein Hyperboloid der Gestalt $\{ \mathbf{x} \in \mathrm{R}3 \mid x\,1$

$a\,12 + x\,2$

$a\,22 - x\,3$

$a\,32 = 1 \}$ mit

$a\,1 = a\,2$ zu konstruieren. In zwei horizontalen Ebenen nehme man zwei übereinanderliegende Kreise (vgl. Bild 5.14). Für jeden Punkt q des unteren Kreises bezeichne $\phi+(q)$ den Punkt des oberen Kreises, der entsteht, wenn man den direkt über q liegenden Punkt q des oberen Kreises um einen fest vorgegebenen Winkel α dreht. Wir verbinden die Punkte q und $\phi+(q)$ jeweils durch einen Stab oder einen straffgezogenen Faden. Die Stäbe, bzw. Fäden überdecken dann den Teil eines Rotationshyperboloids, der zwischen den beiden horizon-

talen Ebenen liegt. Jeder einzelne Stab oder Faden ist Stück einer Geraden aus dem System $G+$. Die Geraden aus dem System $G-$ erhält man, wenn man jeden Punkt des unteren Kreises mit dem Punkt $\phi-(q)$ des oberen Kreises verbindet, der aus q durch Drehen um den Winkel $-\alpha$ entsteht. Ein Foto eines derartigen (und ähnlicher) Modelle findet man in [Mathematische Modelle], Kapitel 1. Läßt man bei der oben beschriebenen Konstruktion die Stäbe sich abwechselnd über- und unterkreuzen, so erhält man ein sehr stabiles Hyperboloid. Dieses Prinzip wird oft bei aus Korb geflochtenen Hockern und Stühlen und auch im Bauwesen angewandt (siehe [Giering–Seybold], Kapitel 8 oder [Beles–Soare]).

(iii) Die *Tangentialebene* TxQ eines Ellipsoids, Paraboloids oder Hyperboloids Q =

$\{ \mathbf{x} \in R3 \mid f(x_1, x_2, x_3) = 0 \}$ (hier ist f eine quadratische Gleichung) definiert man als die Menge aller Punkte $\mathbf{x} + \mathbf{v}$, für die es eine differenzierbare Abbildung $w : (-\varepsilon,\varepsilon) \to Q$ gibt, so daß $w(0) = \mathbf{x}$ und $\dot{w}(0) = \mathbf{v}$ (vgl. [do Carmo]

x3

α α

ϕ+(q)

x

ϕ-(q)

q’

2

x1

q

Bild 5.14

2.4). Man kann zeigen, daß *TxQ* eine Ebene in R3 ist, das heißt, daß es linear unabhängige Vektoren **v**1 , **v**2 gibt, so daß *TxQ* = { **x**+ *t* 1 **v**1 + *t* 2 **v**2 | *t* 1 ,*t* 2 ∈ R }.

Der Durchschnitt *Q* ∩ *TxQ* von *Q* mit seiner Tangentialebene entspricht dann der Nullstellenmenge der quadratischen Funktion

q(*t* 1 ,*t* 2) = *f* (**x** + *t* 1**v**1 + *t* 2**v**2) .

Offenbar ist *q*(0 , 0) = 0, und aus der Definition folgt, daß ∂*q* (0 , 0) = ∂*q* (0 , 0) =

∂*t* 1

∂*t* 2

0. Folglich ist *q* eine quadratische Form. Nach Bemerkung 58 ist also *Q* ∩ *TxQ* ein Einsiedlerpunkt, eine Doppelgerade oder ein Paar sich im Punkt **x** schneidender Geraden. Im Fall eines einschaligen Hyperboloids liegt der dritte Fall vor.

..

Ubung: Beweisen Sie, daß Ellipsoide, zweischalige Hyperboloide und elliptische Pa-

raboloide keine Geraden enthalten!

Dagegen verhalten sich hyperbolische Paraboloide ähnlich wie einschalige Hyperbo-

loide.

Satz 5.4 *Sei G die Menge der Geraden, die ganz in dem hyperbolischen Paraboloid*

2

2

P (−)

a

= { **x** ∈ R3 | x

1 ,a 2

3 = x 1

a 12 − x 2

a 22 } *enthalten sind. G+ bzw. G− bezeichnen die*

Menge aller Geraden g in G, die einen Richtungsvektor der Form (v 1 ,v 2 , 1) *haben*

mit

y 1 v 2 − y 2 v 1 > 0

(*bzw.* y 1 v 2 − y 2 v 1 < 0)

f¨

ur alle **y** ∈ *g. Dann ist G = G+ ∪ G−. Durch jeden Punkt von P* (−)

a 1 *,a* 2 *geht genau*

eine Gerade des Systems G+ und eine Gerade des Systems G−. Zwei verschiedene

Geraden g,g in G, die beide in G+ oder beide in G− liegen, sind stets zueinander

windschief. Ist g ∈ G+ und g ∈ G−, so sind g und g parallel, oder sie schneiden

sich in einem Punkt.

Der Beweis sei den LeserInnen als Übung überlassen.

Wir verwenden nun die Resultate dieses Abschnitts um den Satz von Brianchon

(Satz 4.13) zu beweisen. Dazu benötigen wir noch einige Tatsachen über Geraden

und Ebenen in R3.

Definition 101 *Eine* Ebene *in* R3 *ist eine Teilmenge der Form*

E = { **x** + *t* 1 **v**1 + *t* 2 **v**2 | *t* 1 ,*t* 2 ∈ R } ,

wobei **v**1 , **v**2 ∈ R3 *linear unabhängige Vektoren sind und* **x** ∈ R3 .

¨

Ubung: Sei *E* = {**x** + *t* 1 **v**1 + *t* 2 **v**2 ∈ R3 | *t* 1 ,*t* 2 ∈ R } eine Ebene in R3, **y** ein Punkt von *E*, (*a c*) ∈ *GL*(2 , R) und

b d

$\mathbf{w}1 := a\mathbf{v}1 + b\mathbf{v}2$,

$\mathbf{w}2 := c\mathbf{v}1 + d\mathbf{v}2$

Dann ist

$E = \{ \mathbf{y} + t\,1\,\mathbf{w}1 + t\,2\mathbf{w}2 \mid t\,1\,, t\,2 \in \mathrm{R} \}$!

Lemma 102

(i) Sind g,g verschiedene Geraden in R3 *, die sich entweder schnei-*

den oder parallel sind, so gibt es eine eindeutig bestimmte Ebene E in R3 *, die*

sowohl g als auch g enth¨

alt. E heißt die von g und g aufgespannte Ebene.

(ii) Sind E und E verschiedene Ebenen in R3 *, so ist E ∩ E entweder leer oder*

eine Gerade in R3 *(vgl. Bild 5.15).*

Bild 5.15

E

E

E’

E’

.

(iii) Seien g eine Gerade und E eine Ebene in R3 *. Dann ist entweder*

– g ⊂ E, oder

– $g \cap E = \emptyset$, *oder*

– $g \cap E$ *besteht aus genau einem Punkt.*

Beweis

(i) Wir betrachten zunächst den Fall, daß $g \cap g = \emptyset$. Sei $\mathbf{x} \in g \cap g$. Ferner seien

$\mathbf{v}$ bzw. $\mathbf{v}$ Richtungsvektoren von g bzw. g . Da $g = g$, sind $\mathbf{v}$ und $\mathbf{v}$ linear unabhängig. Setze

$E := \{\mathbf{x} + t\,\mathbf{v} + t\,\mathbf{v} \mid t,t \in \mathrm{R}\}$.

E ist offenbar eine Ebene, die $g = \{\mathbf{x} + t\,\mathbf{v} \mid t \in \mathrm{R}\}$ und $g = \{\mathbf{x} + t\,\mathbf{v} \mid t \in \mathrm{R}\}$

enthält. Sei nun E eine weitere Ebene, die sowohl g als auch g enthält. Dann

ist $\mathbf{x} \in E$, also kann man

$E = \{\mathbf{x} + t\,1\mathbf{w}1 + t\,2\mathbf{w}2 \mid t\,1, t\,2 \in \mathrm{R}\}$

schreiben. Da $g,g \subset E$, gibt es $a,b,c,d \in \mathrm{R}$ so, daß

$\mathbf{v} = a\mathbf{w}1 + b\mathbf{w}2$

und

$\mathbf{v} = c\mathbf{w}1 + d\mathbf{w}2$.

Da $\mathbf{v}$ und $\mathbf{v}$ linear unabhängig sind, ist det(a c) = 0. Die obige Übung zeigt,

b d

daß $E = E$.

Im Fall, daß g und g parallel sind, geht man ähnlich vor. $\mathbf{v}$ sei wieder ein

Richtungsvektor von g; in diesem Fall ist $\mathbf{v}$ auch ein Richtungsvektor von g .

Wähle $\mathbf{y} \in g$, $\mathbf{y} \in g$ und setze $\mathbf{v} := \mathbf{y} - \mathbf{y}$ (vgl. Bild 5.16).

v

y

y’

v’

Bild 5.16

Wie oben prüft man nach, daß $E := \{ \mathbf{y} + t\mathbf{v} + t\,\mathbf{v} \mid t,t \in \mathrm{R} \}$ die eindeutig bestimmte Ebene ist, die g und g enthält.

(ii) Seien E und E verschiedene Ebenen in R3 mit $E \cap E = \emptyset$. Wähle $\mathbf{x} \in E \cap E$!

Dann gibt es Vektoren $\mathbf{v}1$, $\mathbf{v}2$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}$ so, daß

1

2

.

5.3 Geraden auf einem einschaligen Hyperboloid

273

$E = \{ \mathbf{x} + t\,1\,\mathbf{v}1 + t\,2\mathbf{v}2 \mid t\,1\,,t\,2 \in \mathrm{R} \}$

$E = \{ \mathbf{x} + t\,\mathbf{v} + t\,\mathbf{v} \mid t\,,t \in \mathrm{R} \}$.

1

1

2 2

1 2

$\mathbf{v}1$ und $\mathbf{v}2$ sind linear unabhängig, und ebenso sind $\mathbf{v}$ und $\mathbf{v}$ linear unabh

1

2

än-

gig. Da vier Vektoren in R3 stets linear abhängig sind, gibt es (λ 1 ,λ 2 ,λ ,λ) =

1

2

(0 , 0 , 0 , 0), so daß

λ 1**v**1 + λ 2**v**2 = λ **v** + λ **v** .

1 1

2 2

Setze

w := λ 1**v**1 + λ 2**v**2 .

g := { **x** + t **w** | t ∈ R } ist dann eine Gerade, die in E ∩ E enthalten ist. Um zu zeigen, daß g = E ∩ E , nehmen wir an, es gäbe einen Punkt **y** ∈ E ∩ E ,

der nicht auf g liegt. Sei

v := **y** − **x** .

Dann sind **v** und **w** linear unabhängig. Die Ebene

E = {**x** + t 1 **v** + t 2 **w** | t 1 ,t 2 ∈ R }

wäre dann ganz in E ∩ E enthalten. Daraus folgt (nach der obigen Übung),

daß E = E = E . Dies steht im Widerspruch zur Voraussetzung, daß E und

E verschieden sind.

(iii) Seien E = { **x** + t 1 **v**1 + t 2 **v**2 | t 1 ,t 2 ∈ R } und g = {**y** + t **w** | t ∈ R }

1. Fall $\mathbf{v}1$, $\mathbf{v}2$ *und* $\mathbf{w}$ *sind linear abhängig*: Da $\mathbf{v}1$ und $\mathbf{v}2$ linear unabhängig sind, gibt es $\lambda 1 ,\lambda 2 \in \mathrm{R}$ so, daß $\mathbf{w} = \lambda 1\mathbf{v}1 + \lambda 2\mathbf{v}2$. Ist $g \cap E = \emptyset$, so wähle $\mathbf{z} \in g \cap E$. Dann ist

E

$=$

$\{ \mathbf{z} + t 1 \mathbf{v}1 + t 2 \mathbf{v}2 \mid t 1 ,t 2 \in \mathrm{R} \}$

und

g

$=$

$\{\mathbf{z} + t \mathbf{w} \mid t \in \mathrm{R} \} = \{\mathbf{z} + t\lambda 1 \mathbf{v}1 + t\lambda 2 \mathbf{v}2 \mid t \in \mathrm{R} \}$, also ist $g \subset E$.

2. Fall $\mathbf{v}1$, $\mathbf{v}2$ *und* $\mathbf{w}$ *sind linear unabhängig*: Dann bilden $\mathbf{v}1$, $\mathbf{v}2$,$-\mathbf{w}$ eine Basis von R3. Somit gibt es $t 1 ,t 2 ,t \in \mathrm{R}$, so daß

$-\mathbf{x} + \mathbf{y} = t 1\mathbf{v}1 + t 2\mathbf{v}2 - t\mathbf{w}$,

das heißt

$\mathbf{x} + t 1 \mathbf{v}1 + t 2 \mathbf{v}2 = \mathbf{y} + t \mathbf{w}$.

$\mathbf{z} := \mathbf{x} + t 1 \mathbf{v}1 + t 2 \mathbf{v}2$ ist dann ein Punkt von $g \cap E$. Wenn $g \cap E$ neben $\mathbf{z}$ noch einen weiteren Punkt $\mathbf{z}$ hätte, so ließe sich $\mathbf{z} - \mathbf{z}$ schreiben als

$\mathbf{z} - \mathbf{z} = t \mathbf{v}$

$\mathbf{v}$

1

$1 + t 2 2$

und als

$\mathbf{z} - \mathbf{z} = t \mathbf{w}$

.
.
.
.
.
.
.
.
.
.

mit t ,t ,t ∈ R, t = 0. Dann w

1 2

äre

t

t

w = 1 **v**

2 **v**

t

1 + t 2 ,

also wären **v**1 , **v**2 , **w** nicht linear unabhängig.

✷

Wir formulieren jetzt noch einmal neu den Satz von Brianchon (Satz 4.13 im Kapitel über Kegelschnitte).

Satz 5.5 (Brianchon) *Sei C eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, und p*(1) , . . . ,

p(6) *Punkte von C. Mit gj bezeichnen wir die Tangentialgerade von C im Punkt*

p(*j*) *, und wir setzen g* 7 = *g* 1 *. Wir nehmen an, daß gj und gj*+1 *sich in genau einem*

Punkt q(*j*) *schneiden (j* = 1 *,* . . . *,* 6 *). Sind q*(1) = *q*(4) *, q*(2) = *q*(5) *und q*(3) = *q*(6) *, so schneiden sich die Verbindungsgeraden l* 1 *von q*(1) *und q*(4) *, l* 2 *von q*(2) *und q*(5) *, und l* 3 *von q*(3) *und q*(6) *in einem Punkt, oder diese drei Verbindungsgeraden sind*

parallel.

Es genügt, den Satz von Brianchon für die Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln in der

Normalform von Satz 4.1 zu zeigen. Dies sind die

2

2

Ellipsen

Ea

= { (*x*

1 ,*a* 2

1 ,*x* 2) ∈ R2 | *x* 1

a 12 + *x* 2

a 22 = 1 }

(*a* 1 ,*a* 2 > 0)

2

2

Hyperbeln

Ha

$= \{ (x$

$1 ,a 2$

$1 ,x 2) \in R2 \mid x 1$

$a 12 - x 2$

$a 22 = 1 \}$

$(a 1 ,a 2 > 0)$

Parabeln

P

2

$a = \{ (x 1 ,x 2) \in R2 \mid x 2 = ax 1 \}$

$(a > 0)$.

Beweis des Satzes von Brianchon f¨

ur die Ellipse Ea

: W

$1 ,a 2$

ähle $a 3 > 0$! Wir

identifizieren R2 mit der Ebene

$V := \{ (x 1 ,x 2 ,x 3) \in R3 \mid x 3 = 0 \}$

mit Hilfe der Bijektion

R2

$\overrightarrow{}$

V

$(x_1, x_2) \longrightarrow (x_1, x_2, 0)$.

Die Ellipse $C := E_{a_1, a_2}$

entspricht dann dem Durchschnitt von V mit dem einscha-

ligen Hyperboloid $H(1)$

$= \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 / a_1^2 + x_2^2 / a_2^2 - x_3^2 / a_3^2 = 1 \}$. Ferner bezeichne

$\pi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow V$

$(x_1, x_2, x_3) \longrightarrow (x_1, x_2, 0)$

die Projektion auf V .

Lemma 103 *Sei* ˆ

g eine Gerade, die ganz in $H(1)$

enthalten ist, und $\mathbf{p} = (p$

a 1 ,a 2 ,a 3

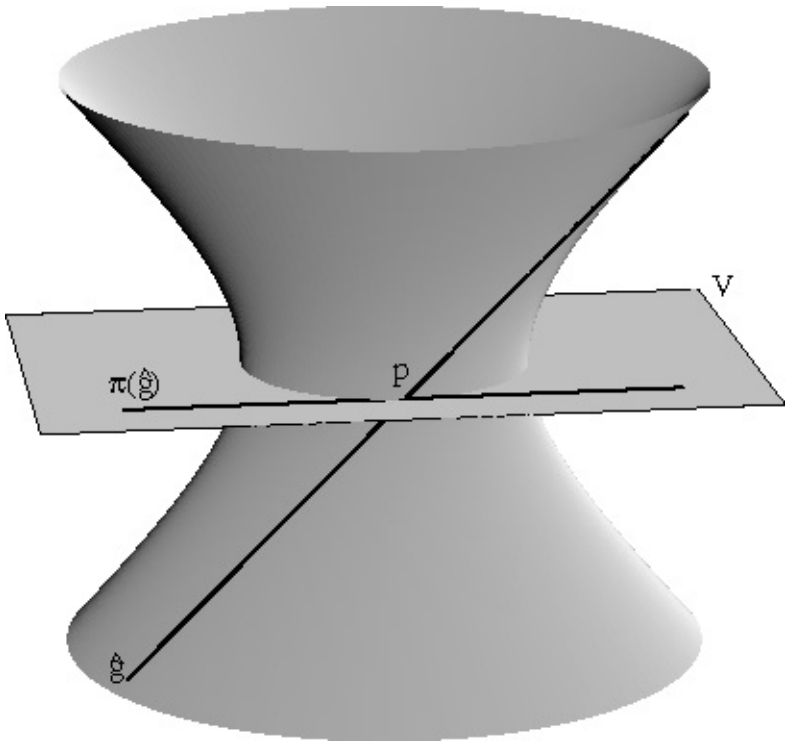
1 ,p 2 , 0)

ihr Durchstoßpunkt durch die Ebene V *. Dann ist die Gerade* $\pi($ˆ

$g) \subset V$ *die Tangen-*

tialgerade an C *im Punkt* $\mathbf{p}$ *(vgl. Bild 5.17).*

.
.
.
.
.
.
.
.



5.3 Geraden auf einem einschaligen Hyperboloid

275

Bild 5.17

Beweis Schreibe

$\hat{}$

$g = \{\mathbf{p} + t\,\mathbf{v} \mid t \in \mathrm{R}\}$

mit $\mathbf{v} = (v_1, v_2, 1)$.

Nach Proposition 99 ist $(v_1, v_2) = (0, 0)$. Also ist $\pi(\hat{g})$ eine Gerade, nämlich

$\pi(\hat{}$

$g) = \{ (p_1, p_2, 0) + t\,(v_1, v_2, 0) \mid t \in \mathrm{R} \}$.

Setze

$(p$

(p

P (t) :=

1 + tv 1)2 +

2 + tv 2)2 − 1 .

a 2

2

1

a 2

Dann ist P (0) = 0, und für jedes t ∈ R ist

(p

(p

(t · 1)2

(t · 1)2

t 2

P (t) =

1 + tv 1)2 +

2 + tv 2)2 −

− 1 +

=

≥ 0 ,

a 2

2

2

2

2

1

a 2

a 3

a 3

a 3

denn $\mathbf{p} + t\,\mathbf{v}$ liegt ja auf $H(1)$

. Folglich hat die Funktion $t \to P(t)$ in 0 ein ab-

a 1 ,a 2 ,a 3

solutes Minimum. Nach Lemma 68 (Seite 190) ist also $\pi(\hat{\ }$

g) die Tangentialgerade an

C im Punkt $\mathbf{p}$.

✷

Mit $G = G+ \cup G-$ bezeichnen wir wie in Proposition 99 das System der Geraden

auf dem Hyperboloid $H(1)$

. Seien nun $p(1), \ldots, p(6)$ Punkte von C und g

a 1 ,a 2 ,a 3

j die

Tangentialgeraden an C in $p(j)$, so daß die Voraussetzungen des Satzes von Brian-

chon erfüllt sind. Das heißt, wir nehmen an, daß sich gj und $gj+1$ in genau einem

Punkt $q(j)$ schneiden, und daß $q(j) = q(j+3)$ $(j = 1, 2, 3)$.

Seien $\hat{g}_1, \hat{g}_3, \hat{g}_5$ die Geraden aus $G+$, die durch $p(1)$, $p(3)$, $p(5)$ gehen, und $\hat{g}_2$, $\hat{g}_4$, $\hat{g}_6$ die Geraden aus $G-$, die durch $p(2)$, $p(4)$, $p(6)$ gehen. Nach Lemma 103 ist

$\pi(\hat{g}j) = gj$.

Da $\hat{g}j$ und $\hat{g}j+1$ in verschiedenen Teilen des Systems G der Geraden auf dem Hy-

perboloid liegen, sind $\hat{g}j$ und $\hat{g}j+1$ nach Proposition 99 entweder parallel, oder sie

schneiden sich in einem Punkt. Wären $\hat{g}j$ und $\hat{g}j+1$ parallel, so wären auch $gj = \pi(\hat{g}j)$

und $gj+1 = \pi(\hat{\ } gj+1)$ parallel, im Widerspruch zur Voraussetzung. Also schneiden sich

ˆ

gj und ˆ

$gj+1$ in einem Punkt, den wir ˆ

$q(j)$ nennen. Offenbar ist

$\pi($ˆ

$q(j)) = q(j)$.

Da $q(j) = q(j+3)$, ist auch ˆ

$q(j) =$ ˆ

$q(j+3)$. Wir bezeichnen mit ˆ

lj die Verbindungs-

q^(6)

p(5)

q^(3)

p(6)

q^(1)

p(4)

p(1)

q^(5)

p(3)

q^(4)

E

p(2)

g^

g^

5

g^

6

g^4

1

q^(2)

g^3

g^2

Bild 5.18

gerade von ˆ

$q(j)$ und ˆ

$q(j+3)$. Die Gerade $lj := \pi(\hat{}\ lj)$ ist dann die Verbindungsgerade

von $q(j)$ und $q(j+3)$. Wir behaupten nun, daß sich die drei Geraden ˆ

$l\,1$, ˆ $l\,2$, ˆ $l\,3$ in einem

Punkt schneiden oder parallel sind. Daraus folgt dann direkt die Behauptung des

Satzes von Brianchon, nämlich daß $l\,1$, $l\,2$, $l\,3$ sich in einem Punkt schneiden

oder

parallel sind.

Um zu zeigen, daß sich ˆ

l 1, ˆ l 2, ˆ l 3 in einem Punkt schneiden oder parallel sind, be-

merken wir zunächst, daß ˆ

gj und ˆ

gj+3 in verschiedenen Teilen des Systems G von

Geraden auf dem Hyperboloid liegen. Nach Proposition 99 sind also ˆ

gj und ˆ

gj+3 par-

allel, oder sie schneiden sich in einem Punkt. Wir können also Lemma 102 anwenden

und sehen, daß es eine Ebene Ej gibt, so daß

ˆ

gj ∪ ˆ

gj+3 ⊂ Ej

(j = 1 , 2 , 3) .

Der Durchschnitt von H(1)

mit E

a 1 ,a 2 ,a 3

j ist ein Kegelschnitt, der die beiden (von-

einander verschiedenen) Geraden ˆ

gj und ˆ

gj+3 enthält.

Nach der Klassifikation von Kegelschnitten (Satz 4.1) ist also

$Ej \cap H(1)$

= ˆ

g

a 1 ,a 2 ,a 3

$j \cup$ ˆ

gj+3

(j = 1 , 2 , 3) .

.

.

.

.

.

5.3 Geraden auf einem einschaligen Hyperboloid

Daraus folgt, daß die Ebenen, E 1 ,E 2 ,E 3 paarweise verschieden sind. Wäre nämlich

etwa E 1 = E 2, so wäre ˆ g 1 ∪ ˆ g 4 = ˆ g 2 ∪ ˆ g 5. Da ˆ g 1, ˆ g 5 ∈ G+ und ˆ g 2,ˆ g 4 ∈ G−, wäre also ˆ

g 1 = ˆ g 5 und ˆ g 2 = ˆ g 4. Dann wäre aber der Schnittpunkt ˆ

q(1) von ˆ

g 1 und ˆ g 2 gleich

dem Schnittpunkt ˆ

q(4) von ˆ

g 4 und ˆ g 5. Also wäre $q(1) = q(4)$, im Widerspruch zur

Voraussetzung.

Nach Konstruktion liegen die Punkte ˆ

q(1) und ˆ

q(4) sowohl auf E 1 als auch auf E 2.

Nach Lemma 102 gilt also für ihre Verbindungsgerade ˆ

l 1

ˆ

$l 1 = E 1 \cap E 2$.

Ebenso gilt

ˆ

$l 2 = E 2 \cap E 3$

und

ˆ

l 3 = E 3 ∩ E 1 .

Falls E 3 die Gerade ˆ l 1 trifft, so ist jeder Punkt von E 3 ∩ ˆ l 1 ein Punkt von ˆ l 1 ∩ ˆ l 2 ∩ ˆ l 3.

Falls E 3 die Gerade ˆ l 1 nicht trifft, so sind die Geraden ˆ l 1 und ˆ l 2 beide in E 2 enthalten und schneiden sich nicht, sind also parallel. Ebenso sind ˆ

l 1 und ˆ l 3 parallel (vgl. Bild

5.19). Damit ist der Satz von Brianchon für Ellipsen bewiesen. ✷

l1

E

E

2

1

l2

l3

E3

Bild 5.19

Beweis des Satzes von Brianchon f¨

ur die Hyperbel *Ha*

und die

1 ,*a* 2

Parabel *Pa*

Den Beweis führt man analog wie oben, indem man *Ha*

mit dem Ebenenschnitt

1 ,*a* 2

{ **x** ∈ *H*(1)

| *x*

a 1 , 1 ,*a* 2

2 = 0 } des einschaligen Hyperboloids

2

2

H(1)

=

x ∈ R3 | *x* 1 + *x* 2 − *x* 3 = 1

a 1 , 1 ,*a* 2

a 2

2

2

1

a 2

identifiziert und die Projektion (*x* 1 ,*x* 2 ,*x* 3) → (*x* 1 , 0 ,*x* 3) betrachtet.

Ebenso kann man *P* als Schnitt des hyperbolischen Paraboloids

P (−)

2

2

1

=

x ∈ R3 | x

− x

√ ,

3 = ax 1

2

a 1

.

mit der Ebene { **x** ∈ R3 | x 2 = 0 } auffassen, die Projektion (x 1 ,x 2 ,x 3) → (x 1 , 0 ,x 3) verwenden und Satz 5.4 anwenden.

..

Ubung: Seien g 1 ,g 2 ,g 3 drei paarweise windschiefe Geraden. Dann gibt es genau eine

Quadrik Q, die alle drei Geraden g 1 ,g 2 ,g 3 enthält!

..

Ubung: Verwenden Sie Lemma 103 um Lemma 98 zu beweisen!

¨

Ubung: Formulieren und beweisen Sie eine Verallgemeinerung des Satzes von Brian-

chon, in der zugelassen wird, daß g 1 und g 2 oder g 2 und g 3 usw. parallel sind!

5.4

Lorentz-Geometrie

In diesem Abschnitt betrachten wir hauptsächlich den Kegel

$K :=$

$(x$

2

2

$1 ,x 2 ,t) \in R3 \mid x 1 + x 2 - t 2 = 0$

und die Gruppe der invertierbaren Matrizen, die K in sich abbilden. Daß wir die

dritte Koordinate jetzt t statt x 3 nennen, liegt daran, daß der Kegel K (bzw. sein

Analogon in R4) eine wichtige Rolle in der speziellen Relativitätstheorie spielt; t

übernimmt dann die Rolle einer Zeitkoordinate. Wir gehen darauf später in diesem

Abschnitt ein. Zunächst aber betrachten wir die Situation unter rein mathematischen

Gesichtspunkten. Mit $SO(2 , 1)$ bezeichnen wir die Menge aller reellen (3×3)-Matrizen

A mit Determinante 1, die K in sich abbilden, d.h. für die

(

$\backslash$

x 1

$A \cdot \backslash\ x\ \rangle$

2

$\in K$

falls (x 1 ,x 2 ,t) $\in K$.

t

Wir wollen nun die Menge SO(2 , 1) auf algebraische Weise beschreiben. Dazu führen

wir die folgende Notation ein:

$\langle$

$\backslash$

a 11 a 12 a 13

Ist $A = \backslash\ a$

$\rangle$

21

a 22 a 23

eine (3 × 3)-Matrix,

a 31 a 32 a 33

so nennen wir

$\langle$

⎞

a 11 a 21 a 31

A

:= ⎛ a

⎠

12

a 22 a 32

a 13 a 23 a 33

die zu **A** *transponierte Matrix* . Es gilt

⎛

⎞ ⎛

⎞

⎛

⎞

⎛

x 1

x

x

x

1

1

1

(A x

2

) ·

x

x

·

x

2

=

2

(A

2

)

(5.14)

t

t

t

t

.

5.4 Lorentz-Geometrie

279

In der Tat ist

⎛

⎜⎛

⎜

⎛

⎜⎛

⎜

x 1

x

a

x

1

11 *x* 1 + *a* 12 *x* 2 + *a* 13 *t*

1

(A⎝ x

⎠ ⎝

⎠

⎝

⎠ ⎝

⎠

2

) ·

x

=

a

·

x

2

21 x 1 + a 22 x 2 + a 23 t

2

t

t

a 31 x 1 + a 32 x 2 + a 33 t

t

=

a 11 x 1 x 1 + a 12 x 2 x 1 + a 13 tx 1 + a 21 x 1 x 2

+ a 22 x 2 x 2 + a 23 tx 2 + a 31 x 1 t + a 32 x 2 t + a 33 tt

=

a 11 x 1 x 1 + a 21 x 2 x 1 + a 31 t x 1 + a 12 x 1 x 2

+ a 22 x 2 x 2 + a 32 t x 2 + a 13 x 1 t + a 23 x 2 t + a 33 t t

⎛

⎝

⎛

⎝

x 1

x 1

=

⎝ x ⎠

⎝

⎠

2

· (A

x

)

2

t

t

Lemma 104 *SO*(2 , 1) *ist die Menge aller reellen* (3 × 3) -*Matrizen A mit Determi-*

nante 1, f¨

ur die gilt

⎛

⎝

⎛

⎝

1

0

0

1

0

0

A ◦⎝ 0 1

0 ⎠ ◦ *A* = ⎝ 0 1

0 ⎠

0

0

− 1

0

0

− 1

Beweis

Wir bezeichnen mit G die Menge aller reellen (3×3)-Matrizen A mit Determinante

1, für die gilt

⎛

⎝

⎛

⎝

1

0

0

1

0

0

$A \circ$ ⎝ 0 1

0 ⎠ $\circ A =$ ⎝ 0 1

0 ⎠

0

0

− 1

0

0

− 1

Wie in Abschnitt 5.1 betrachten wir die quadratische Form

⎛

⎜⎛

⎜⎛

⎜

x 1

1

0

0

x 1

q(x

2

2

⎞

⎟⎞

⎠ ⎝

⎠

1 ,x 2 ,t) = x 1 + x 2 − t 2 =

x 2

.

0

1

0

x 2

t

0

0

− 1

t

(5.15)

Dann ist nach (5.14) und (5.15)

⎛

⎞

⎛

⎞

⎛

⎞

⎛

⎞

x 1

x 1

1

0

0

x 1

$q($ A ⎠ x

⎟

⎜

⎟

⎜

⎟

⎜

⎟

2

) =

x 2

· A ∘

0

1

0

$\circ A$

x 2

t

t

0

0

− 1

t

(5.16)

Da

$K = \{ (x 1 ,x 2 ,t) \in$ R3 | $q(x 1 ,x 2 ,t) = 0 \}$, folgt aus (5.15) und (5.16) sofort, daß $G \subset SO(2 , 1)$.

Wir zeigen nun die umgekehrte Inklusion. Sei also $A \in SO(2 , 1)$.

Wir setzen

⎛

⎝

1

0

0

$M := A$

$\circ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \end{pmatrix} \circ A$

0

0

-1

.

$\begin{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}$

1

0

0

und wollen zeigen, daß $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \end{pmatrix}$. Da $A \in SO(2, 1)$, ist

0

0

-1

⎛

⎞

⎛

⎞

x 1

x 1

⎝ x ⎠

⎝

⎠

2

· M

x 2

= 0 für alle (x 1 ,x 2 ,t) mit

(5.17)

t

t

⎛

⎞ ⎛

⎞⎛

⎞

x 1

1

0

0

x 1

⎝ x ⎠ ⎝

⎠⎝

⎠

2

.

0

1

0

x 2

= 0

t

0

0

− 1

t

und

⎛

⎞

1

0

0

det M = det ⎛ 0

1

0 ⎠ = − 1 .

0

0

− 1

Das Polynom

⎛

⎞

1

0

0

P (λ) = det (M − λ⎛ 0 1

0 ⎠)

0

0

− 1

in λ ist reell und hat Grad 3. Aus dem Zwischenwertsatz folgt, daß es eine reelle Nullstelle λ 0 hat. Dann ist

$$\det\left(M - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0 . \tag{5.18}$$

$$\begin{matrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & & \end{matrix}$$

0

0

Wäre $M = \lambda$ ⎝

⎠

0

0

1

0

, so wäre die Menge

0

0

− 1 ⎛ ⎞

⎛

⎞ ⎛

⎞

x 1

1

0

0

x 1

K := { (x

⎝

⎠

⎝

⎠ ⎝

⎠

1 ,x 2 ,t) ∈ R3 |

x

.

2

(M − λ 0

0

1

0

)

x 2

= 0 }

t

0

0

− 1

t

Nullstellenmenge einer nichtverschwindenden quadratischen Form. Wegen (5.18) ist

bei der Normalform für diese quadratische Form wenigstens eine der Zahlen αi gleich

Null. Nach der Klassifikation von Satz 5.2 wäre also K äquivalent zu einem Zylinder

über einem Kegelschnitt. Aus (5.17) folgt, daß

$K \subset K$

Ein Zylinder über einem Kegelschnitt enthält aber niemals einen Kegel der Form K.

Dies ist anschaulich klar, ein präziser Beweis sei den LeserInnen als Übung überlas-

⎛

⎝

1

0

0

sen. Damit ist gezeigt, daß $M = \lambda$ ⎞

⎠

3

0

0

1

0

. Da det $M = -1$, folgt $\lambda_0 = 1$,

0

0

-1

also $\lambda_0 = 1$.

✷

.

5.4 Lorentz-Geometrie

281

..

Ubung: Zeigen Sie, daß $SO(2,1)$ eine Untergruppe von $GL(3,\mathbb{R})$ ist!

Beispiele von Elementen von $SO(2,1)$:

(5.19)

$\cos\phi$

$-\sin\phi$

a) Ist

eine Drehung, so ist

$\sin\phi$

$\cos\phi$

(

⎝

cos ϕ

− sin ϕ 0

$R(\phi) :=$ ⎛ sin ϕ

cos ϕ

0 ⎠ $\in SO(2, 1)$,

0

0

1

und Elemente dieser Form $R(\phi)$ wollen wir räumliche Drehungen“ in $SO(2, 1)$

”

nennen.

b) Ist $\alpha \in$ R, so ist

⎛

⎝

cosh α

0

− sinh α

$L(\alpha) :=$ ⎛

0

1

0

⎞ ∈ $SO(2, 1)$.

− sinh α 0

cosh α

Elemente dieser Form nennt man *Lorentz-Boosts* in x 1-Richtung. Allgemeiner sind Lorentz-Boosts Elemente der Form $R(\phi) \circ L(\alpha) \circ R(\phi) - 1$.

c)

⎛

⎝

− 1 0

0

⎝ 0

1

0 ⎞ ∈ $SO(2, 1)$

0

0

− 1

¨

Ubung: Zeigen Sie: $L(\alpha 1 + \alpha 2) = L(\alpha 1) \circ L(\alpha 2)$!

Der rechte untere Eintrag einer Matrix $A \in SO(2, 1)$ spielt eine besonders wichtige Rolle. Wir bezeichnen ihn mit $\gamma(A)$. In Formeln:

$\left(\right.$

$\backslash$

a 11 a 12 a 13

$A = \backslash\ a$

$\left.\right)$

21

a 22 a 23

$\in SO(2\ ,\ 1) = \Rightarrow \gamma(\ A) = a$ 33

a 31 a 32 a 33

$\left(\right.$

$\backslash$

0

$\gamma(\ A)$ ist also die t-Komponente des Vektors $A\backslash\ 0\ \left.\right)$.

1

Lemma 105 *F¨*

ur $A \in SO(2\ ,\ 1)$ *ist*

$|\gamma(\ A)\ | \geq 1$

Ferner ist $\gamma(\ A) = 1$ *genau dann, wenn A eine r¨*

aumliche Drehung ist.

.

Beweis Sei $A \in SO(2\,,1)$ und

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \\ y_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dann ist $t = \gamma(A)$ und

$$y_2^2 + y_2^2 - t^2 = q(y_1, y_2, t) = q(0\,,0\,,1) = -1$$

und somit

$\gamma(A)2 = t\,2 = 1 + y\,2$

2

$1 + y\,2$

≥ 1

Ist $\gamma(A) = 1$, so ist $y\,1 = y\,2 = 0$. A hat also dann die Gestalt

⎛

⎝

$a\,11\ a\,12\ 0$

$A = ⎝\ a$

⎠

21

$a\,22\ 0$

$a\,31\ a\,32\ 1$

Somit ist

⎛

⎝

⎛

⎝

1

0

0

1

0

0

⎝ 0 1

0 ⎠

=

$A \circ$ ⎝ 0 1

0 ⎠ $\circ A$

0

0

− 1

0

0

− 1

⎛

⎜ ⎛

⎜

a 11 a 21 a 31

a 11

a 12

0

=

⎝ *a*

⎠ ⎝

⎠

12

a 22 *a* 32

◦

a 21

a 22

0

0

0

1

−*a* 31 −*a* 32 − 1

Vergleicht man die Einträge in der letzten Spalte der obigen Matrix-Gleichung, so

folgt *a* 31 = *a* 32 = 0. Die Matrix *A* hat also die Gestalt

⎛

⎝

a 11 *a* 12 0

A = ⎝ *a*

)

21

a 22 0

0

0

1

Schreibt man

a

A :=

11

a 12

a 21 a 22

so folgt aus Lemma 104, daß det A = 1 und (A)

◦ A = 11. Man sieht nun leicht,

daß A von der Form

cos ϕ

− sin ϕ

A =

sin ϕ

cos ϕ

mit $\phi \in$ R ist. Damit ist Lemma 105 bewiesen.

✷

Das Komplement des Kegels K in R3 zerfällt in drei Teile, nämlich (vgl. Bild 5.20)

$R := \{ (x$

2

2

$1 ,x 2 ,t) \in \mathrm{R3} \mid x 1 + x 2 - t 2 > 0 \}$

Z

2

2

$+ := \{ (x 1 ,x 2 ,t) \in \mathrm{R3} \mid x 1 + x 2 - t 2 < 0 ,t > 0 \}$

.

5.4 Lorentz-Geometrie

283

Z+

R

Z-

Bild 5.20

$Z- := \{ (x$

2

2

$1 ,x 2 ,t) \in \mathrm{R3} \mid x 1 + x 2 - t 2 < 0 ,t < 0 \}$

..

Ubung: Zeigen Sie, daß $Z+$, $Z-$ und R zusammenhängende Teilmengen von R3 sind,

daß aber weder $Z+ \cup Z-$ noch $Z+ \cup R$ noch $Z- \cup R$ zusammenhängend sind!

Wegen Lemma 104 und (5.16) bildet jedes $A \in SO(2\ ,\ 1)$ die Menge R bijektiv auf R

und die Menge $Z+ \cup Z-$ bijektiv auf $Z+ \cup Z-$ ab.

Proposition 106 *Sei* $A \in SO(2\ ,\ 1)$. *Ist* $\gamma(\ A) > 0$, *so bildet A die Menge Z+ bijektiv auf Z+ und die Menge Z− bijektiv auf Z− ab. Ist* $\gamma(\ A) < 0$, *so bildet A die Menge*

Z+ bijektiv auf Z− ab.

Zum Beweis dieser Proposition verwenden wir

Lemma 107 *Seien* $(\ x\ 1\ ,x\ 2\ ,t) \in Z+$, $(\ x\ 1\ ,x\ 2\ ,t\ ) \in Z+ \cup Z-$. *Dann gilt*

⎛

⎜⎛

⎜⎛

⎜

x 1

1

0

0

x

⎜

1

x

⎛⎞

⎜⎟

⎝ < 0

2

.

0

1

0

x

⇐⇒ (x 1 ,x 2 ,t) ∈ Z+

2

> 0

(x

t

0

0

− 1

t

1 ,x 2 ,t) ∈ Z−

Beweis

⎛

⎜⎛

⎜⎛

⎜

x 1

1

0

0

x

⎝

1

x

⎠⎝

⎠⎝

⎠

2

.

0

1

0

x

$= x$

2

$1\ x\ 1 + x\ 2\ x\ 2 - tt$

t

0

0

-1

t

Nach der Cauchy-Schwarz’schen Ungleichung (Korollar 18 auf Seite 74) ist

$(x$

2

2

2

2

$1\ x\ 1 + x\ 2\ x\ 2)2 \leq (x\ 1 + x\ 2) (x\ 1$

$+ x\ 2)$

Nach Voraussetzung ist

$x\ 2$

2

2

2

$1 + x\ 2$

$< t\ 2$

und $x\ 1 + x\ 2 < t\ 2$

.

Folglich ist

$|x\ 1\ x\ 1 + x\ 2\ x\ 2\ | < |t|\ |t\ |$

Ist $(\ x\ 1\ ,x\ 2\ ,t\ ) \in Z+$, so sind t und t positiv und somit ist

$x\ 1\ x\ 1 + x\ 2\ x\ 2 - tt < 0$.

Ist $(\ x\ 1\ ,x\ 2\ ,t\ ) \in Z-$, so ist $t > 0$ und $t < 0$ und damit

$x\ 1\ x\ 1 + x\ 2\ x\ 2 - tt > 0$.

Beweis von Proposition 106 Wir beweisen diese Proposition im Fall $\gamma(\ A) > 0$.

Der Fall $\gamma(\ A) < 0$ wird analog bewiesen.

Die Annahme, daß $\gamma(\ A) > 0$ ist, impliziert, daß

$\begin{pmatrix}$

$\backslash$

0

$A \backslash\ 0\ \rfloor \in Z+$

1

Sei nun (x 1 ,x 2 ,t) ∈ Z+. Dann ist

⎛

⎝

⎛

⎝

⎛

⎝

x 1

1

0

0

0

(A⎠ x

⎞

⎠

⎞

⎠

⎞

2

) ·

0

1

0

$\circ$ (A

0

) =

t

0

0

− 1

1

⎛

⎞

⎛

⎞ ⎛

⎞

x 1

1

0

0

0

=

$\backslash\ x\ \rangle$

$\backslash$

$\rangle\ \backslash$

$\rangle$

2

$\cdot A$

0

1

0

A

0

=

t

0

0

-1

1

$($

$\backslash($

$\backslash\ ($

$\backslash$

x 1

1

0

0

0

=

⎝ x ⎠⎛

⎠ ⎝

⎠

2

0

1

0

0

=

t

0

0

− 1

1

=

$-t < 0$

x 1

Nach Lemma 107 ist also A x 2

$\in Z$

t

+. Dies zeigt, daß

$A(Z+) \subset Z+$.

Da $Z- = -Z+$, ist $A(Z-) \subset Z-$. Nun bildet A aber $Z+ \cup Z-$ bijektiv auf $Z+ \cup Z-$

ab. Daraus folgt, daß $Z+$ bijektiv auf $Z+$ und $Z-$ bijektiv auf $Z-$ abgebildet wird. ✷

Aus Proposition 106 folgt, daß

$SO+(2 , 1) = \{ A \in SO(2 , 1) \mid \gamma(A) > 0 \}$

eine Untergruppe von $SO(2 , 1)$ ist. Offenbar liegen die räumlichen Drehungen (5.19a)

und die Lorentz-Boosts (5.19b) in $SO+(2 , 1)$, während eine Matrix wie in (5.19c)

nicht in $SO+(2 , 1)$ liegt. Im folgenden Satz zeigen wir, daß räumliche Drehungen

und Lorentz-Boosts die Gruppe $SO+(2 , 1)$ erzeugen.

5.4 Lorentz-Geometrie

Satz 5.6 *F¨*

ur jedes $A \in SO+(2\ ,\ 1)$ *gibt es* $\phi\ 1\ ,\phi\ 2\ ,\alpha$*, so daß*

$A = R(\ \phi\ 1) \circ L(\ \alpha) \circ R(\ \phi\ 2)$

Beweis Sei

⎛

⎝

$a\ 11\ a\ 12\ a\ 13$

$A = \backslash\ a$

⎠

21

$a\ 22\ a\ 23$

$\in SO+(2\ ,\ 1)$

$a\ 31\ a\ 32\ a\ 33$

Ist $a\ 13 = a\ 23 = 0$, so folgt aus

⎛

⎝

0

$-a\ 2$

⎝

⎠

33

= q(A

0

) = q(0 , 0 , 1) = − 1 ,

1

daß γ(A) = a 33 = 1. Nach Lemma 105 ist A in diesem Fall eine räumliche Drehung.

Wir können also α = 0, ϕ 2 = 0 setzen. Von jetzt an nehmen wir an, daß (a 13 ,a 23) =

(0 , 0). Der Vektor (a 13 ,a 23) ist die Projektion des Vektors

⎛

⎝

0

A⎝ 0 ⎠

1

auf die (x

2

2

2

1- x 2)-Ebene (vgl. Bild 5.21). Da a 13 + a 23 − a 33

= − 1, hat der Vektor

(0,0,1)

A.(0,0,1) = (a ,a ,a)

13

23

33

(a ,a ,0)

13

23

Bild 5.21

(a 13 ,a 23) die Länge

~

β(A) :=

γ(A)2 − 1

Durch eine Drehung in der (x 1, x 2)-Ebene um einen geeigneten Winkel, den wir −ϕ 1

nennen wollen, läßt sich (a 13 ,a 23) in den Vektor (˜

β(A) , 0) überführen. Setze

A := R(−ϕ 1) ◦ A.

Dann ist

.

⎛

⎝

⎛

⎝

0

~

$\beta(A)$

$A \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}$

0

$\end{pmatrix}$

und ~

$\beta(A)2 - \gamma(A)2 = -1$

1

$\gamma(A)$

Wähle nun α so, daß

$\cosh \alpha = \gamma(A)$,

$\sinh \alpha = -$ ~

$\beta(A)$

und setze

$A := L(-\alpha) \circ A = L(-\alpha) \circ R(-\phi\ 1) \circ A$

Dann ist

⎛

⎝

⎛

⎝ ⎛

⎝

⎛

⎝

0

γ(A)

0

− ˜ β(A)

˜

β(A)

0

A ⎝ 0 ⎠ = ⎝

0

1

0

⎠ ⎝

0

⎠ = ⎝ 0 ⎠

1

− ˜ β(A) 0

$\gamma(A)$

$\gamma(A)$

1

Somit ist $\gamma(A) = 1$. Nach Lemma 105 ist A eine räumliche Drehung $R(\phi 2)$. Aus

$L(-\alpha) \circ R(-\phi 1) \circ A = R(\phi 2)$

folgt

$A = R(\phi 1) \circ L(\alpha) \circ R(\phi 2)$. ✷

Wir beschreiben nun die Beziehungen der bis jetzt formulierten Resultate zur spe-

ziellen Relativitätstheorie.

Der Ausgangspunkt der speziellen Relativitätstheorie ist die experimentell festge-

stellte Tatsache, daß je zwei sich gegeneinander bewegende Beobachter die gleiche

Lichtgeschwindigkeit messen (Michelson-Morley-Experiment , siehe z.B.

[Feynman–Leighton–Sands] 15-3). Die Konsequenzen dieser Tatsache auf die Mes-

sung von Längen, Zeiten und Geschwindigkeiten nennt man *Lorentz-Geometrie*.

Zunächst gehen wir davon aus, daß jeder Beobachter über ein räumliches Koor-

dinatensystem und eine geeichte Uhr verfügt. Ein *punktf*¨

ormiges Ereignis entspricht

also für einen Beobachter einem Paar $(\mathbf{x}, t)$, wobei $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ die räumlichen Koordinaten des Ereignisses sind, so wie sie der Beobachter mißt. Die punktförmigen

Ereignisse entsprechen also für jeden Beobachter Elementen von $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^4$. Da

man sich $\mathbb{R}^4$ nur schwer vorstellen kann, beschränken wir uns auf Ereignisse, die alle

in einer Ebene stattfinden. Somit entsprechen für jeden Beobachter punktförmige

Ereignisse Elementen von $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$. Die Einschränkung auf ebene Ereignisse machen

wir übrigens wirklich nur wegen der Anschaulichkeit; alles, was wir noch sagen wer-

den, überträgt sich direkt auf die räumliche Situation. Betrachten wir die Messung

von Raum und Zeit im Koordinatensystem eines Beobachters etwas genauer. Ein

punktförmiges Teilchen hat zu jeder Zeit t eine Ortskoordinate $\mathbf{x}(t)$. Die Menge

$$\{ (\mathbf{x}(t), t) \mid t \in \mathbb{R} \}$$

nennt man die *Weltlinie* des Teilchens (vgl. Bild 5.22). Die Weltlinie ist genau dann

eine Gerade, wenn sich das Teilchen mit konstanter Geschwindigkeit $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$

bewegt. In diesem Fall ist die Weltlinie von der Form

$$\{ (p_1 + t v_1, p_2 + t v_2, t) \mid t \in \mathbb{R} \}$$

(p_1, p_2) ist dabei die Position des Teilchens zur Zeit $t = 0$. Um die Notation zu

Weltlinie

t

Weltlinie eines Teilchens

mit konstanter

1

Geschwindigkeit **v**

1

(0,0,0) (p1,p2)

(v1,v2)

Bild 5.22

vereinfachen, nehmen wir an, daß die Längen- und Zeiteinheiten so gewählt sind,

daß die Lichtgeschwindigkeit gleich 1 ist. Betrachten wir nun die Weltlinie eines

Teilchens, das sich zur Zeit 0 im Koordinatenursprung befindet und sich mit kon-

stanter Geschwindigkeit **v** bewegt. Falls |**v** | = 1, d.h. falls sich das Teilchen mit

Lichtgeschwindigkeit bewegt, so verläuft seine Weltlinie ganz im Kegel

$K = \{ ((x$

2

2

$1 ,x 2) ,t) \in R2 \times R \mid x 1 + x 2 - t 2 = 0 \},$

und umgekehrt. Falls |**v** | < 1, so verläuft die Weltlinie in $Z+ \cup Z- \cup \{ 0 \}$ (vgl. Bild 5.23). Falls |**v** | = 0, so ist die Weltlinie die *t*-Achse. Wie ändern sich die Raum-t

Weltlinie eines Teilchens mit

Geschwindigkeit $|\mathbf{v}| < 1$

Weltlinie eines Teilchens

mit Lichtgeschwindigkeit

Bild 5.23

Zeit Koordinaten nun für einen zweiten Beobachter, der sich dem ersten Beobach-

ter gegenüber mit konstanter Geschwindigkeit (gemessen im Koordinatensystem des

.

.

.

.

.

ersten Beobachters) bewegt? Wir nennen die Raum-Zeit Koordinaten des zweiten

Beobachters ($\mathbf{x}$,t), und nehmen an, daß $\mathbf{x} = t = 0$ und $\mathbf{x} = t = 0$ das gleiche

punktförmige Ereignis beschreiben. Es ist naheliegend anzunehmen, daß sich die

Koordinaten ($\mathbf{x}$,t) durch eine orientierungserhaltende lineare Transformation aus

den Koordinaten ($\mathbf{x}$,t) ergeben (die Annahme der Linearität“ kann übrigens nach

”

einem Satz von E.C. Zeeman stark abgeschwächt werden, vgl. [Naber], 1.6). Dann

gibt es also eine (3 × 3)-Matrix A mit det $A > 0$, so daß

$$\begin{pmatrix} x \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$$

Die ganze Diskussion ändert sich nicht, wenn wir **x** durch **x** / 3

√ det A und t durch

t / 3

√ det A ersetzen. Deswegen können wir annehmen, daß det $A = 1$. Die Invarianz

der Lichtgeschwindigkeit impliziert, daß Weltlinien von Teilchen, die sich mit Licht-

geschwindigkeit bewegen, von A wieder auf Weltlinien von Teilchen, die sich mit

Lichtgeschwindigkeit bewegen, abgebildet werden. Folglich bildet A den Kegel K,

der ja gerade aus solchen Weltlinien besteht, wieder in den Kegel K ab. Nach Lem-

ma 104 ist also $A \in SO(2\ ,\ 1)$. Es ist ferner vernünftig anzunehmen, daß A die Menge

$Z+$ in sich überführt (Erhalt der Kausalität). Nach Proposition 106 bedeutet dies,

daß

$A \in SO+(2\ ,\ 1)$

Satz 5.5 besagt, daß sich A in der Form $A = R(\ \phi\ 1) \circ L(\ \alpha) \circ R(\ \phi\ 2)$ schreiben läßt, d.h.

daß A bis auf die im ersten Koordinatensystem durchgeführte räumliche Drehung

$R(\ \phi\ 2)$ und die im zweiten Koordinatensystem durchgeführte räumliche Drehung

$R(\ \phi\ 1)$ ein Lorentz-Boost $L(\ \alpha)$ ist. Die räumlichen Drehungen in den beiden Ko-

ordinatensystemen sind physikalisch recht harmlos; deswegen nehmen wir an, daß

$A = L(\ \alpha)$ ist.

Wir schreiben

$\Big($

$\Big\backslash$

γ

0

$-\beta\gamma$

$A = \backslash$

0

1

0

$\rangle$

mit $\gamma\ 2(1 - \beta\ 2) = 1$

$-\beta\gamma\ 0$

γ

Betrachten wir nun ein Teilchen, das sich im ersten Koordinatensystem mit der

konstanten Geschwindigkeit $\mathbf{v} = (\ v\ 1\ ,v\ 2)$ bewegt und zur Zeit $t = 0$ durch den Koor-

dinatenursprung geht. Wir bestimmen nun die Geschwindigkeit $\mathbf{v} = (\ v\ 1\ ,v\ 2\ )$ des

Teilchens im zweiten Koordinatensystem. Dazu berechnen wir das Bild der Weltlinie

$\{\ t \cdot v\ 1$

$v\ 2$

$|\ t \in \mathrm{R}\ \}$

1

des Teilchens. Es ist

$\langle$

$\backslash$

v 1

$\{t \cdot A\backslash\ v\ \rangle$

2

$|\ t \in \mathrm{R}\ \} = \{t \cdot (\ \gamma(\ v\ 1 - \beta)\ , v\ 2\ , \gamma(1 - \beta v\ 1)\ )\ |\ t \in \mathrm{R}\ \}$

1

v

v

$=$

$\{t \cdot (\ 1 - \beta\ ,$

2

$,\ 1)\ |\ t \in \mathrm{R}\ \}$

$1 - \beta v\ 1\ \gamma(1 - \beta v\ 1)$

.

.

.

.

.

.

.

.

5.4 Lorentz-Geometrie

289

Also ist

v

$1 - \beta 2$

$\mathbf{v} = (v$

$1 - \beta$

$1 , v 2) = ($

$,$

v

$1 - \beta v$

$2)$

(5.20)

1

$1 - \beta v 1$

Ist beispielsweise $\mathbf{v} = (0 , 0)$, so ist $\mathbf{v} = (-\beta, 0)$. Ein im ersten Koordinatensys-

tem ruhendes Teilchen hat also im zweiten Koordinatensystem die Geschwindigkeit

$(-\beta, 0)$.

..

Ubung: Zeigen Sie, daß ein Teilchen, das sich im ersten Koordinatensystem mit Ge-

schwindigkeit $(\beta, 0)$ bewegt, im zweiten Koordinatensystem in Ruhe ist!

Deshalb sagt man, daß sich das zweite Koordinatensystem gegenüber dem ersten mit

Geschwindigkeit $(\beta, 0)$ bewegt. Die Formel (5.20) ist die Rechenregel, die angibt, wie

sich Geschwindigkeiten zwischen zwei Koordinatensystemen mit Relativgeschwin-

digkeit β umrechnen lassen. Beachten Sie, daß nichtrelativistisch die Formel einfach

$\mathbf{v} = \mathbf{v} - (\beta, 0)$ wäre!

..

Ubung: Zeigen Sie, daß bei der Umrechnungsformel (5.20)

$\mathbf{v}$

$= 1 \Longleftrightarrow \mathbf{v} = 1$!

Betrachten wir nun zwei punktförmige Ereignisse, die nacheinander (zu den Zeit-

punkten $t\,1 < t\,2$) am Koordinatenursprung des ersten Koordinatensystems stattfin-

den. Sie haben also für den ersten Beobachter die Koordinaten $(0\,,\,0\,,t\,1)$ und $(0\,,\,0\,,t\,2)$,

und ihr zeitlicher Abstand ist

$\Delta\, t = t\,2 - t\,1$

Wir berechnen nun den zeitlichen Abstand der beiden Ereignisse im zweiten Koordi-

0

natensystem. Er ist gleich der dritten Komponente des Vektors A

0

, also gleich

$\Delta\, t$

1

$\Delta t = \gamma(A) \cdot \Delta t =$

Δt

$1 - \beta 2$

$\gamma(A) =$

1

√

beschreibt also den relativistischen Effekt der *Zeit-Dilatation*.

$1 - \beta 2$

..

Ubung:

(i) Seien (**x** , 0), (**y** , 0) zwei Ereignisse zur Zeit 0 im ersten Koordinatensystem. Berechne den räumlichen Abstand dieser Ereignisse im zweiten Koordinatensystem!

(ii) Sei **v** ∈ R3 \ {**0** }. Zeigen Sie

– **v** ∈ *R* ⇔ Es gibt *A* ∈ *SO*+(2 , 1), so daß *A***v** in der (x 1 ,x 2)-Ebene liegt!

– **v** ∈ *Z*+ ⇔ Es gibt *A* ∈ *SO*+(2 , 1), so daß *A***v** ∈ R+ · (0 , 0 , 1)!

Deshalb nennt man Vektoren in *R* *raumartig* und Vektoren in *Z*+ *zeitartig* . Vektoren in *K* nennt man *lichtartig*, und *K* den *Licht-kegel* .

Damit wollen wir die Diskussion der Lorentz-Geometrie abschließen. Wie gesagt,

haben wir nur eine räumlich zweidimensionale Situation diskutiert; alle Resultate

übertragen sich aber direkt auf R3 × R und die Gruppe

⎛

⎝

1

0

0

0

⎜ 0 1 0

0 ⎜

SO+(3 , 1) := { A ∈ GL(4 , R)

| A ◦ ⎜

⎝

⎜

0

0

1

0 ⎞ ∘ A

0

0

0

− 1

⎛

⎝

1

0

0

0

⎜ 0 1 0

0 ⎟

=

⎜

⎝

⎟

0

0

1

0 ⎠, det $A = 1$,a 44 ≥ 1 }

0

0

0

− 1

Die Konsequenzen der eben diskutierten Regeln für die Messung von geometrischen

Größen und der Zeit auf physikalische Gesetze sind Thema der speziellen Relativi-

tätstheorie (siehe etwa [Feynman–Leighton–Sands], Ch. 15, 16, 17). Für eine ausführ-

liche Diskussion der Lorentz-Geometrie (oder, wie man auch sagt, der Minkowski-

Geometrie) siehe [Naber] oder [Yaglom] sec. 12.

..

Ubungen:

i) Sei $K+ := \{ (x 1 ,x 2 ,t) \in K \mid t > 0 \}$ und $K- := \{ (x 1 ,x 2 ,t) \in K \mid t < 0 \}$.

Zeigen Sie: Jedes $A \in SO+(2 , 1)$ bildet $K+$ bijektiv auf $K+$ und $K-$ bijektiv

auf $K-$ ab!

ii) Sei $r = 0$ und Hr das Hyperboloid

H

2

2

$r := \{ (x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - t^2 = r \}$

Zeigen Sie, daß $SO(2,1) = \{ A \in GL(3, \mathbb{R}) \mid A(Hr) = Hr, \det A = 1 \}$! Wie läßt sich die Untergruppe $SO^+(2,1)$ in Termen der Operation auf Qr charakterisieren (die Antwort ist verschieden, je nachdem ob $r < 0$ oder $r > 0$, d.h.

ob Hr ein zweischaliges oder einschaliges Hyperboloid ist)?

iii) Geben Sie einen Beweis von Proposition 106, der darauf basiert, daß Z^+, Z^-

und R die Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^3 \setminus K$ sind!

iv) Zeigen Sie, daß $SO^+(2,1)$ zusammenhängend ist, $SO(2,1)$ aber nicht!

5.5 Ergänzungen zu Kapitel 5

5.5 Ergänzungen zu Kapitel 5

5.5.1 Der Trägheitstensor

Wir betrachten einen starren Körper, der in einem festen Punkt O aufgehängt ist,

und wollen seine kinetische Energie bei einer gleichförmigen Rotation um eine Ach-

se durch O bestimmen. Dazu führen wir zunächst ein

körperfestes“ cartesisches

”

Koordinatensystem K mit Koordinatenursprung in O ein. In guter Approximati-

on kann man sich den starren Körper als Ansammlung einer sehr großen Anzahl

von Massenpunkten mit Masse mi ($1 \leq i \leq N$) vorstellen, deren Position ri im

körperfesten Koordinatensystem K für alle Zeit dieselbe ist. Wir führen nun noch

ein raumfestes Koordinatensystem K ein und nehmen an, daß zur Zeit $t = 0$ K

und K übereinstimmen. Die Achse, um die der Körper rotiert, sei bezüglich des

raumfesten Koordinatensystems K gleich R · $\boldsymbol{\omega}$ mit $\boldsymbol{\omega} \in$ R3 , $\boldsymbol{\omega} = 1$. Die Winkelge-schwindigkeit sei 1. Ist $R(t)$ die Drehung um R · $\boldsymbol{\omega}$ um den Winkel $t \cdot 360 \circ / 2\pi$ (von $\boldsymbol{\omega}$

aus gesehen), so ist die Position des i-ten Massenpunktes zur Zeit t im raumfesten

Koordinatensystem gleich $R(t)\mathbf{r}\, i$. Die gesamte kinetische Energie ist deshalb gleich

N

d

T

2

$\omega =$

$1 / 2\, mi$

$R(t)\, ri$

dt

i=1

Wie wir in Abschnitt 2.3.3 gesehen haben, ist dies gleich

N

$T\omega = 1/2$

$mi\ (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}\ i) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}\ i)$

$i=1$

Die Abbildung

N

$\boldsymbol{\omega} \rightarrow 1/2$

$mi\ (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}\ i) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}\ i)$

$i=1$

ist eine quadratische Form. Wie wir zu Anfang von Abschnitt 5.1 gesehen haben,

läßt sie sich durch eine Matrix Θ beschreiben, d.h.

$T\omega = \boldsymbol{\omega} \cdot \Theta\ \boldsymbol{\omega}$

Beachten Sie, daß Θ unabhängig von $\boldsymbol{\omega}$ ist. Θ heißt der *Trägheitstensor* des Körpers

bezüglich des Aufhängepunktes *O*.

..

Ubung: Zeigen Sie

N

N

$2\Theta =$

m

2

i

$\mathbf{r}\ i$

11 −

$mi\ (\mathbf{r} \circ \mathbf{r}$

i

$i)$,

i=1

i=1

wobei für einen Vektor **v** die Matrix **v**

◦ **v** als

⎛

⎝

v 2

1

v 1 v 2 v 1 v 3

⎝ v

2

⎠

2 v 1

v 2

v 2 v 3

definiert ist!

v

2

3 v 1

v 3 v 2

v 3

.

.

.

.

.

.

Nach Satz 5.1 ist es möglich, das Koordinatensystem K so zu wählen, daß Θ eine Diagonalmatrix wird, d.h.

⎛

⎝

Θ1

0

0

Θ = ⎝ 0

Θ

⎟

2

0

0

0

Θ3

Die Zahlen Θ1 , Θ2 , Θ3 heißen *Hauptträgheitsmomente* des Körpers bezüglich des

Punktes *O*, und die Achsen des ausgezeichneten Koordinatensystems heißen *Haupt-*

tr¨

agheitsachsen.

5.5.2

Eine Beziehung zwischen Lorentz-Geometrie und hyperbolischer

Geometrie

Wie in Abschnitt 5.4 bezeichne *H* 1 das zweischalige Hyperboloid

H

2

2

1 := { (*x* 1 ,*x* 2 ,*t*) ∈ R3 | *x* 1 + *x* 2 − *t* 2 = − 1 }

Der Punkt (0 , 0 , − 1) liegt auf *H* 1. Es sei

ˆ

$P : H 1 \setminus \{(0 , 0 , - 1) \} - \rightarrow$ R2

die Abbildung, die jedem Punkt $(x 1 ,x 2 ,t)$ von $H 1 \setminus \{(0 , 0 , - 1) \}$ den Durchstoßpunkt der Geraden durch $(0 , 0 , - 1)$ und $(x 1 ,x 2 ,t)$ mit der Ebene

$\{ (x 1 ,x 2 ,t) \in$ R3 $| t = 0 \} \sim$

= R2

zuordnet, d.h.:

ˆ

x

x

$P (x$

1

2

$1 ,x 2 ,t) =$

,

$1 + t 1 + t$

ˆ

P ist ähnlich definiert wie die stereographische Projektion, die wir in Abschnitt 3.5.1

betrachtet haben und in Abschnitt 6.3 untersuchen werden. Man überlegt sich leicht,

daß ˆ

P eine Bijektion zwischen H

2

2

1 \{(0 , 0 , − 1) } und { (x 1 ,x 2) ∈ R2 | x 1 + x 2

= 1 }

ist. Die Umkehrabbildung zu ˆ

P ist

2

2

ˆ

2 x

1 + x

+ x

P − 1 : (x

2

1

2

1 ,x 2) − →

2 x 1

,

,

$1 - (x 2$

2

2

2

2

2

$1 + x 2) 1 - (x 1 + x 2) 1 - (x 1 + x 2)$

Ferner bildet ˆ

P die beiden Schalen des Hyperboloids

$H\pm := \{ (x$

1

$1 ,x 2 ,t) \in H 1 \mid t >$

$< 0 \}$

bijektiv auf das Innere bzw. Äußere des Einheitskreises ab. Mit P bezeichnen wir die

Abbildung, die durch Verknüpfung der Einschränkung ˆ

$P \mid$

von ˆ

P auf $H+$ mit der

$H+$

1

1

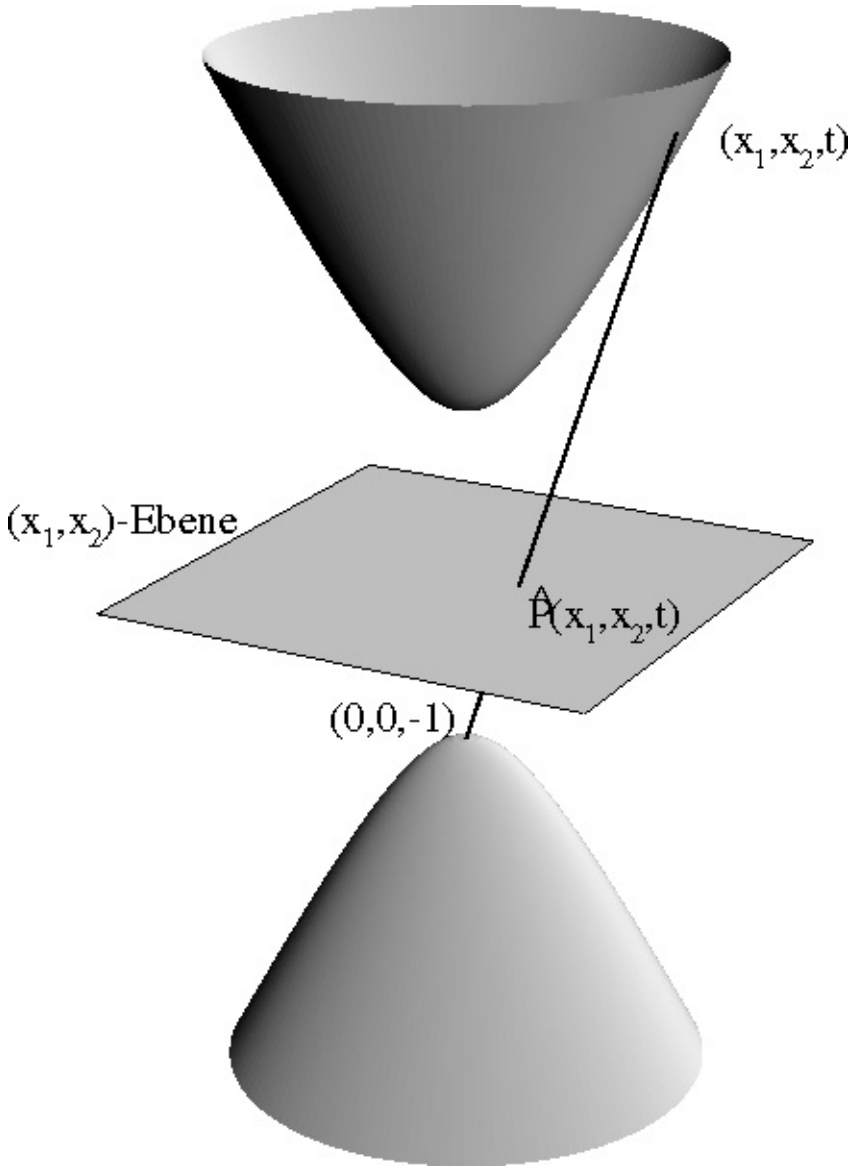
Bijektion R2 → C, (*x* 1 ,*x* 2) → *x* 1 + *ix* 2 entsteht. *P* ist also eine Bijektion zwischen *H*+ und dem Inneren *E* des Einheitskreises in C:

1

.

.

.



5.5 Ergänzungen zu Kapitel 5

Bild 5.24

P :

$H+$

$- \rightarrow E = \{ z \in \mathrm{C} \mid |z| < 1 \}$

1

$(x 1 , x 2 , t) - \rightarrow$

1 (x

t+1

1 + ix 2)

Es stellt sich nun heraus, daß bei der Bijektion P die Operation von SO+(2 , 1) auf

H+ der in Abschnitt 3.4 betrachteten Operation von SU (1 , 1) auf E durch gebrochen

1

lineare Transformationen entspricht. Wir erinnern an die Notation

a

a

ϕ

11 z + a 12

11

a 12

$A(z) =$

falls $A =$

a

a

$21\ z + a\ 22$

21

$a\ 22$

Satz 5.7 *Es gibt einen surjektiven Gruppenhomomorphismus*

$\rho : SU(1, 1) \longrightarrow SO+(2, 1)$

so daß f¨

ur alle $A \in SU(1, 1)$ *und alle* $(x_1, x_2, t) \in H+$

1

⎛

⎝

$x\ 1$

$P(\rho(A) \cdot \begin{pmatrix} x \end{pmatrix}$

2

$) = \phi A(P(x_1, x_2, t))$

t

Ferner ist f¨

ur $A, A \in SU(1, 1)$

$\rho(A) = \rho(A) \Longleftrightarrow A = \pm A$.

.

.

.

.

.

.

Das Innere E des Einheitskreises ist die Punktmenge für das Poincaré-Scheibenmo-

dell der hyperbolischen Geometrie. Die Geraden in diesem Modell sind Schnitte von

E mit Kreisen oder Geraden, die senkrecht auf dem Rand von E stehen. Wie in

Abschnitt 3.2 können alle anderen Begriffe, die eine hyperbolische Ebene“ konsti-

”

tuieren, mit Hilfe der Operation von $SU(1, 1)$ auf E definiert werden. Dies folgt aus

dem Satz 3.6. Aus dem obigen Satz folgt also, daß man eine hyperbolische Ebene

erhält, wenn man als Punktmenge die Schale H_1^+ des Hyperboloids H_1^1 nimmt, als

Geraden die Schnitte von H_1^+ mit Ebenen durch $(0, 0, 0)$, und die

übrigen Begriffe

mittels der Operation von $SO+(2\ ,\ 1)$ definiert. Projiziert man übrigens $H+$ vom Ur-

1

sprung aus auf die Kreisscheibe $\{\ (\ x$

2

2

$1\ ,x\ 2\ ,t) \in$ R3 | $t = 1\ ,x\ 1 + x\ 2$

$< 1\ \}$, so erhält man

wieder das Beltrami-Klein-Modell der hyperbolischen Ebene. In Kapitel 6 werden

wir einen Satz formulieren, der dem obigen Resultat sehr ähnlich ist (Satz 6.5); auch

die Beweise sind sich sehr ähnlich. Wir geben deswegen hier nur eine Beweisskizze.

Die Umkehrabbildung zu P ist

2Im z

$1 + |z|\ 2$

$z - \rightarrow$

2Re z ,

,

$1 - |z|\ 2\ 1 - |z|\ 2\ 1 - |z|\ 2$

Wir berechnen zunächst für $(\ x\ 1\ ,x\ 2\ ,t) \in H+$ und spezielle Matrizen $A \in SU$ (1

, 1) das 1

Element

$P - 1 \circ \phi A \circ P (x 1 ,x 2 ,t)$

$ei\phi$

0

Ist $A =$

0

$e-i\phi$

, so ist

x

$P - 1$

$\circ \phi$

$1 + ix 2$

A

$\circ P (x 1 ,x 2 ,t) = P - 1 e 2 i\phi 1 + t$

1

=

$P - 1$

$(x$

$1 + t$

$1 \cos 2 \phi - x 2 \sin 2 \phi) + i(x 1 \sin 2 \phi + x 2 \cos 2 \phi)$

=

(x 1 cos 2 ϕ − x 2 sin 2 ϕ,x 1 sin 2 ϕ + x 2 cos 2 ϕ,t)

⎛

⎝

x 1

=

R(2 ϕ)⎝ x

⎠

2

t

wobei wie in (5.19a)

⎛

⎝

cos 2 ϕ

− sin 2 ϕ 0

R(2 ϕ) = ⎝ sin 2 ϕ

cos 2 ϕ

0 ⎠

0

0

1

eine räumliche Drehung ist.

Ist $A =$

$\cosh \alpha$

$\sinh \alpha$

2

2

$\sinh \alpha$

$\cosh \alpha$

, so folgt unter Berücksichtigung der Gleichung $x_1 + x_2 =$

$t_2 - 1$ für Elemente $(x_1, x_2, t) \in H_+$

1

.

.

.

.

.

.

5.5 Ergänzungen zu Kapitel 5

295

$P^{-1} \circ \phi_A \circ P(x_1, x_2, t) =$

$(x$

$=$

P^{-1}

$1 + ix_2) \cosh \alpha + (1 + t) \sinh \alpha$

$(x 1 + ix 2) \sinh \alpha + (1 + t) \cosh \alpha$

$\left(\right.$

$x 2$

2

$1 + x 2 + (1 + t)2$

$\sinh \alpha \cosh \alpha$

$=$

$P - 1 \backslash (x 2$

2

$1 + x 2) \sinh 2 \alpha + 2(1 + t) x 1 \sinh \alpha \cosh \alpha + (1 + t)2 \cosh 2 \alpha$

$\backslash$

$(1 + t) (x 1 - ix 2) \sinh 2 \alpha + (x 1 + ix 2) \cosh 2 \alpha$

$+$

$\left.\right) =$

$(x 2$

2

$1 + x 2) \sinh 2 \alpha + 2(1 + t) x 1 \sinh \alpha \cosh \alpha + (1 + t)2 \cosh 2 \alpha$

$\left(\right.$

$\backslash$

$(1 + t) t \sinh 2 \alpha + x 1(\sinh 2 \alpha + \cosh 2 \alpha) + ix 2(\cosh 2 \alpha - \sinh 2 \alpha)$

$=$

$P - 1 \Big($

$\Big)$

$(1 + t)\,(t - 1)\sinh 2\alpha + x\,1\sinh 2\alpha + (1 + t)\cosh 2\alpha$

x

$=$

$P - 1$

$1\cosh 2\alpha + t\sinh 2\alpha + ix\,2$

$x\,1\sinh 2\alpha + t\cosh 2\alpha + 1$

$=$

$(x\,1\cosh 2\alpha + t\sinh 2\alpha, x\,2, x\,1\sinh 2\alpha + t\cosh 2\alpha)$

$\Big($

$\Big)$

$x\,1$

$=$

$L(-2\alpha) \cdot \Big(x\Big)$

2

t

wobei L den Lorentz-Boost wie in (5.19b) bezeichnet. Also gibt es für jedes A in der

Menge

$E := \{$

$\cosh \alpha$

$\sinh \alpha$

$| \alpha \in \mathrm{R} \} \cup \{$

$e i\phi$

0

$| \phi \in \mathrm{R} \}$

$\sinh \alpha$

$\cosh \alpha$

0

$e{-}i\phi$

eine Matrix $B \in SO(2 , 1)$, so daß

$P - 1 \circ \phi A \circ P = B$

B ist offenbar durch A eindeutig bestimmt. Da

$(P - 1 \circ \phi A \circ P) \circ (P - 1 \circ \phi A \circ P) = P - 1 \circ \phi A \circ A \circ P$

gibt es also einen Homomorphismus ρ von der von E erzeugten Untergruppe G nach

$SO{+}(2 , 1)$, so daß

$P - 1 \circ \phi A \circ P = \rho(A)$

für alle $A \in G$.

Unter Verwendung von Satz 3.6 und der ersten Übung am Ende von Abschnitt

3.3 kann man zeigen, daß E ein Erzeugendensystem für SU (1 , 1) ist, das heißt, daß

$G = SU(1,1)$. Die obigen Rechnungen und Satz 5.6 implizieren, daß ein Erzeugen-

densystem von $SO^+(2,1)$ im Bild von ρ liegt. Deshalb ist ρ surjektiv. Die Aussage

über die Fasern von ρ ist einfach zu verifizieren.

✷

5.5.3 Die Schl¨afli'sche Doppelsechs und kubische Fl¨achen

Der Satz von Pappos ergibt eine interessante Konfiguration von 9 Punkten und 9

Geraden, so daß durch jeden Punkt der Konfiguration drei Geraden der Konfigu-

ration gehen und auf jeder Geraden drei Punkte liegen. Allgemein nennt man eine

Konfiguration vom Typ (nk,ml) ein Paar (P,G), wobei P eine Menge von n Punk-

ten und G eine Menge von m Geraden ist, so daß jeder Punkt von P auf genau k

Geraden von G liegt, und jede Gerade aus G genau l Punkte von P enthält. Die

Konfiguration des Satzes von Pappos ist also vom Typ (93 , 93). Es gibt sehr viele

solche Konfigurationen (vgl. [Hilbert–Cohn Vossen] III). Eine besonders

interessante

ist die *Schl*¨

afli'sche Doppelsechs. Diese räumliche Konfiguration vom Typ (302 , 125)

wollen wir hier beschreiben. Um eine Schläfli'sche Doppelsechs zu konstruieren, be-

ginnt man mit einer Geraden g 1 und drei paarweise windschiefen Geraden g ,g ,g ,

2

3

4

die g 1 treffen. In einer Übung am Ende von Abschnitt 5.3 haben wir gesehen, daß

g/2

g

g/

1

g/

4

3

Bild 5.25

es eine Quadrik Q gibt, die g ,g ,g enth

2

3

4

ält.

Zeigen Sie:

$g_1 \subset Q$!

Wählen Sie eine fünfte Gerade g , die g

$,g$ $,g$ windschief ist und Q in

5

1 trifft, zu g_2 3 4

genau zwei Punkten trifft.

Zeigen Sie:

Es gibt genau eine von g_1 *verschiedene Gerade* g_6 *mit der Eigenschaft, daß* g_6

jede der Geraden g_2 $,g_3$ $,g_4$ $,g_5$ *trifft oder zu ihr parallel ist!*

2

3

4

5

Wählen Sie nun eine Gerade g , die g

$,g$ $,g$ $,g$ und zu g

6

1 trifft, windschief zu g_2 3 4 5

6 ist,

und die weder auf Q noch auf der durch g ,g ,g noch auf der durch g ,g ,g noch

2

3

5

2

4

5

auf der durch g ,g ,g bestimmten Quadrik liegt.

3

4

5

Zeigen Sie:

F¨

ur j = 2 , 3 , 4 , 5 *gibt es genau eine von g* 1 *verschiedene Gerade gj, die jede der*

Geraden g ,g ,g ,g ,g mit Ausnahme von g trifft oder zu ihr parallel ist!

2

3

4

5

6

j

5.5 Ergänzungen zu Kapitel 5

297

g

g

g

g

g

g

1

2

3

4

5

6

g/2

g/3

g/4

g/5

g/6

Bild 5.26

Falls in den obigen Aussagen nie der Fall der Parallelität auftritt, haben $g_1, \ldots, g_6$;

$g, \ldots, g$ das folgende Inzidenzschema:

2

6

Zeigen Sie:

Von den Geraden $g_1, \ldots, g_6$ *liegen keine vier auf einer Quadrik! (Hinweis: Jede*

Gerade, die drei dieser vier Geraden trifft, liegt dann auch auf der Quadrik)

Zeigen Sie:

$gj \cap g = \emptyset f$

liegen auf der

j

..

ur $j = 2, 3, 4, 5, 6$ *! (Hinweis: Welche der Geraden gi*

Quadrik durch $g_1, gj, gj+1$ *bzw. für* $j = 6$ *durch* g_1, g_5, g_6 *?)*

Zeigen Sie:

Es gibt genau eine von g verschiedene Gerade g , die jede der Geraden g

6

1

$2, g_3, g_4, g_5$

trifft oder zu ihr parallel ist! Es gilt $g_1 \cap g = \emptyset$*!*

Zeigen Sie:

$g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6$

onnen so gew¨

ahlt werden, daß keine zwei der Geraden $g_1, \ldots, g_6$,

$g_1, \ldots, g_6$ *parallel sind!*

Eine *kubische Fl¨*

ache in $\mathbb{R}^3$ ist eine Menge der Form

$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 :$

a_i

$x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} = 0\}$

$1 \le i_1 < i_2 < i_3$

1

2

3

$i_1 + i_2 + i_3 \leq 3$

Zeigen Sie:

Ist ˜

Q eine Quadrik, F eine kubische Fl¨

ache und ˜

$Q \subset F$ *, so gibt es eine Ebene E,*

so daß $F =$ ˜

$Q \cup E$*!*

Zeigen Sie:

Es gibt eine kubische Fl¨

ache F , die $g_1, \ldots, g_6, g, \ldots, g$ *enth*

1

6

¨

alt! (Hinweis: W¨

ahlen

Sie vier Punkte auf g_1 *und je drei geeignete Punkte auf* $g, \ldots, g$ *. Zeigen Sie, daß*

2

6

es eine kubische Fl¨

ache F gibt, die diese 19 Punkte enth¨

alt. Zeigen Sie, daß alle

Geraden gj und g in F enthalten sind, wenn diese 19 Punkte geeignet gew

j

¨

ahlt

waren!)

.

298

5 Quadriken in R3

Zeigen Sie:

g schneidet g

und g

1

6 *oder ist zu g* 6 *parallel! (Hinweis: Nehmen Sie an, daß g* 1

6

windschief sind. Zeigen Sie, daß es eine von g verschiedene Gerade

gibt, die jede

5

der Geraden g 2 *,g* 3 *,g* 4 *,g* 6 *trifft oder zu ihr parallel ist. Dann ist*

⊂ *F und = g .*

1

Zeigen Sie, daß es eine Quadrik ˜

Q gibt, die ,g ,g ,g enth

1

5

6

¨

alt! Zeigen Sie, daß ˜

Q ⊂ *F*

und f¨

uhren Sie dies zum Widerspruch!)

Falls von den Geraden keine zwei parallel sind, so haben *g* 1 , . . . ,*g* 6 ,*g* , . . . ,*g* also das

1

6

folgende Inzidenzschema:

g

g

g

g

g

g

1

2

3

4

5

6

g/1

g/2

g/3

g/4

g/5

g/6

Bild 5.27

Diese Konfiguration von 12 Geraden und 30 Punkten heißt die Schläfli'sche Dop-

pelsechs nach Ludwig Schläfli (1814-1895, Professor für Botanik und Mathematik in

Bern).

¨

Ubung:

Versuchen Sie, ein räumliches Bild einer Schläfli'schen Doppelsechs zu zeichnen!

Zeigen Sie:

Ist i = j, so spannen gi und gj eine Ebene Eij auf, und

$F \cap Eij = gi \cup gj$

oder es gibt eine Gerade ij, so daß

$F \cap Eij = gi \cup gj \cup ij$

(5.21)

Man kann zeigen, daß für eine "allgemeine" Wahl von g 1 ,g ,g ,g ,g ,g f

2

3

4

5

6 ür alle Paare

(i,j) mit $i = j$ der Fall (5.21) auftritt. In diesem Fall sind die Geraden ij paarweise

verschieden und auch von den Geraden g 1 , . . . ,g 6 und g , . . . ,g verschieden.

1

6

Damit hat man nun 12 + 15 = 27 Geraden auf F gefunden. Man kann zeigen, daß

27 die Maximalzahl von Geraden auf einer kubischen Fläche ist, die keine Quadrik

enthält (vgl. [Hilbert–Cohn Vossen] § 25, [Mathematische Modelle] für ein Bild einer

kubischen Fläche mit den 27 Geraden und weitere Erklärungen, sowie [Mumford]

.

5.5 Ergänzungen zu Kapitel 5

oder [Reid] für Beweise). Die Symmetriegruppe dieser Konfiguration von 27 Gera-

den (d.h. die Gruppe der Permutationen der 27 Geraden, die das Inzidenzschema

erhalten) hat Ordnung 51840 und spielt eine wichtige Rolle z.B. in der Theorie der

Liealgebren.

.

.

.

6

Die Geometrie der Gruppe SO(3)

In Kapitel 1 haben wir $SO(3)$ definiert als die Gruppe, die aus der Identität und allen

Drehungen im euklidischen Raum um Achsen durch einen ausgezeichneten Punkt O

besteht. Satz 1.6 besagt, daß die Hintereinanderschaltung zweier Drehungen um eine

Achse durch O wieder eine Drehung um eine Achse durch O ist. Er garantiert,

daß

SO(3) eine Gruppe ist. Um diese Aussage noch einmal anders zu beweisen, und um

die Gruppe SO(3) genauer zu untersuchen, gehen wir mit Methoden der analytischen

Geometrie vor. Wir führen also cartesische Koordinaten im Raum ein, die den Punkt

O als Basispunkt haben. Dadurch erhalten wir eine Identifikation des Raumes mit

R3, so daß O dem Punkt $\mathbf{0} = (0 , 0 , 0)$ entspricht. Einer Drehung um eine Achse durch

O entspricht dann eine lineare Abbildung von R3 auf sich, die den Abstand in R3

erhält. Eine solche lineare Abbildung wird durch eine Matrix R beschrieben, die die

Eigenschaft hat, daß für jedes $\mathbf{x} \in$ R3 die Vektoren $\mathbf{x}$ und $R\mathbf{x}$ die gleiche Länge

haben. Also ist

$$(R\mathbf{x}) \cdot (R\mathbf{x}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$$

für alle $\mathbf{x} \in$ R3. Daraus folgt, daß für alle $\mathbf{x} , \mathbf{y} \in$ R3

$$(R\mathbf{x}) \cdot (R\mathbf{y}) =$$

$$1 [(R\mathbf{x} + R\mathbf{y}) \cdot (R\mathbf{x} + R\mathbf{y}) - (R\mathbf{x}) \cdot (R\mathbf{x}) - (R\mathbf{y}) \cdot (R\mathbf{y})]$$

2

=

$$1 [(R(\mathbf{x} + \mathbf{y})) \cdot (R(\mathbf{x} + \mathbf{y})) - (R\mathbf{x}) \cdot (R\mathbf{x}) - (R\mathbf{y}) \cdot (R\mathbf{y})]$$

2

=

1 [$(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) - \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{y} \cdot \mathbf{y}$]

2

=

$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$

(6.1)

Nun ist

$(R\mathbf{x}) \cdot (R\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot (R \circ R)\mathbf{y}$

wobei R

die zu R transponierte Matrix bezeichnet (vgl. Abschnitt 5.4, Seite 278).

Folglich ist

$\mathbf{x} \cdot (R \circ R - 11)\mathbf{y} = 0$ für alle $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in$ R3

Ist $\mathbf{y}$ fest, so impliziert die Bedingung, daß das Skalarprodukt von (R

$\circ R - 11)\ \mathbf{y}$

mit jedem Vektor $\mathbf{x} \in$ R3 gleich Null ist, daß also $(R \circ R - 11)\ \mathbf{y} = \mathbf{0}$. Dies gilt

für jedes $\mathbf{y}$, also ist R

$\circ R - 11 = 0$ oder

R

$\circ R = 11$

(6.2)

R erhält auch die Orientierung in R3, also ist det $R > 0$. Aus (6.2) folgt, daß

$(\det R)2 = (\det R) \cdot (\det R) = (\det 11)2 = 1$, also ist

$\det R = 1$

(6.3)

Drehungen um eine Achse im Raum werden also durch Matrizen beschrieben, die

(6.2) und (6.3) erfüllen. Umgekehrt gilt

.

.

.

.

.

Satz 6.1 *Sei R eine reelle* (3×3) *-Matrix, die*

R

◦ $R = 11$ und $\det R = 1$

erf¨

ullt. Dann ist die durch R beschriebene lineare Abbildung R3 → R3 , **x** → *R* **x** *eine Drehung um eine Achse durch* **0** *oder die Identit*¨

at.

Beweis Wir betrachten das Polynom

$f(\lambda) := \det(R - \lambda 11)$

in der Variablen λ. Es hat Grad drei und deswegen mindestens eine reelle Nullstelle

$\lambda 0$. Dann ist $\det(R - \lambda 011) = 0$. Deswegen gibt es einen von Null

verschiedenen

Vektor **v**, so daß ($R - \lambda$ 011) **v** = **0**. Indem wir **v** durch 1

||**v** || **v** ersetzen, können wir

annehmen, daß ||**v** || = 1. Es gilt also

R**v** = λ 0**v** und ||**v** || = 1

f (λ) heißt das *charakteristische Polynom* von R , λ 0 nennt man einen *Eigenwert* von

R , und **v** ist ein *Eigenvektor* von R zum Eigenwert λ 0. Nach (6.2) ist

λ 2 ||**v** || 2 = (λ

0

0**v**) · (λ 0**v**) = R**v** · R**v** = **v** · **v** = ||**v** || 2

also ist

λ 0 = ± 1

Sei E := {**x** ∈ R3 /**x** · **v** = 0 } die Ebene in R3 durch **0** senkrecht zu **v**. Dann ist für jedes **x** ∈ E nach (6.1)

1

1

1

(R**x**) · **v** =

(R**x**) · (λ

(R**x**) · (R**v**) =

x · **v** = 0

λ

$0\mathbf{v}) =$

0

$\lambda\, 0$

$\lambda\, 0$

also

$R\mathbf{x} \in E$

für alle $\mathbf{x} \in E$

Wähle nun eine Basis $\mathbf{v}1$, $\mathbf{v}2$ von E mit $||\mathbf{v}1\,|| = ||\mathbf{v}2\,|| = 1$ und $\mathbf{v}1 \cdot \mathbf{v}2 = 0$ (siehe Bild 6.1).

Sei

$\tilde{}$

a

b

$R =$

c

d

die Matrix der Einschränkung von R auf E bezüglich der Basis $\mathbf{v}1$, $\mathbf{v}2$, d.h.

$\tilde{}$

$R\mathbf{v}1 = a\mathbf{v}1 + c\mathbf{v}2$

$\tilde{}$

$R\mathbf{v}2 = b\mathbf{v}1 + d\mathbf{v}2$

~

R beschreibt wieder eine Isometrie, also ist

~

R

◦ ~

$R = 11$

(6.4)

.

E

v2

v1

v

O

Bild 6.1

Wir unterscheiden nun zwei Fälle, nämlich $\lambda\ 0 = 1$ und $\lambda\ 0 = -1$.

1. Fall $\lambda\ 0 = 1$: Wegen (6.3) ist dann

det ~

$R = \lambda\circ$ det ~

$R = \det R = 1$

Daraus und aus (6.4) sieht man nach einer einfachen Rechnung, daß ˜

R von der Form

˜

a

$-b$

$R =$

mit $a\ 2 + b\ 2 = 1$

b

a

ist. ˜

R beschreibt also eine Drehung in der Ebene E um einen Winkel α mit $\cos \alpha = a$.

Die von R beschriebene Abbildung ist also die Drehung um die Achse R · **v** um den

Winkel α.

2. Fall $\lambda\ 0 = -1$: Wie oben sieht man, daß ˜

R von der Form

˜

a

b

$R =$

mit a 2 + b 2 = 1

b

$-a$

ist. ˜

R ist die Matrix der Spiegelung in E an der Achse R · (b**v**1 + (1 − a)**v**2). Somit beschreibt R die Drehung im Raum um diese Achse mit Winkel 180 ◦.

✷

¨

Ubung: Zeigen Sie, daß die Menge der (3 × 3)-Matrizen R mit $R \circ R$ = 11 und

det R = 1 eine Gruppe bzgl. Matrixmultiplikation bildet!

Die obige Übung zeigt, daß das Produkt zweier Matrizen, die (6.2) und (6.3)

erfüllen, wieder (6.2) und (6.3) erfüllt. Dies gibt einen neuen Beweis der zuerst in

Satz 1.6 formulierten Tatsache, daß das Produkt zweier Drehungen im Raum um

eine Achse durch O wieder eine Drehung im Raum um eine Achse durch O oder die

Identität ist. Sind nämlich zwei Drehungen im Raum um Achsen durch O gegeben, so

werden sie nach dem, was wir zu Beginn des Kapitels gesagt haben, durch Matrizen

R 1 und R 2 beschrieben, die (6.2) und (6.3) erfüllen. Die Hintereinanderschaltung

der beiden Drehungen wird durch die Matrix R 1 ◦ R 2 beschrieben, die wieder (6.2)

.

und (6.3) erfüllt. Nach Satz 6.1 ist sie also wieder eine Drehung um eine Achse durch

O, oder die Identität. Die Bezeichnung $SO(n)$ (spezielle orthogonale Gruppe) ist die

Standardbezeichnung für die Gruppe aller $(n \times n)$-Matrizen A, für die $A \circ A = 11$

und $\det A = 1$. Daß wir in Kapitel 1 die Gruppe aller Drehungen im Raum um eine

Achse durch O mit $SO(3)$ bezeichnet haben, entspricht nicht ganz dem üblichen

Sprachgebrauch und ist erst durch Satz 6.1 gerechtfertigt.

..

Ubung: Zeigen Sie, daß jedes Element von $SO(3)$ in $SO(3)$ zu einer Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1

mit $0 \leq \alpha < 360 \circ$ *konjugiert ist!*

¨

Ubung: Gegeben sei das *Einheitstangentialb*¨

undel

$T\,1\,S\,2 := \{(\mathbf{x}\,,\,\mathbf{y}) \in \mathrm{R}3 \times \mathrm{R}3 \mid \mathbf{x} = \mathbf{y} = 1 \text{ und } \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0\}$

der 2-Sphäre $S\,2 = \{\mathbf{x} \in \mathrm{R}3 \mid \mathbf{x} = 1\}$. Versuchen Sie, eine Bijektion

$f : SO(3) \rightarrow T\,1\,S\,2$

zu finden!

6.1

Eulersche Winkel

Bekanntlich ist eine lineare Abbildung von R3 nach R3 durch die Bilder der Basisvek-

toren $\mathbf{e}1 := (1\,,\,0\,,\,0)$, $\mathbf{e}2 := (0\,,\,1\,,\,0)$, $\mathbf{e}3 := (0\,,\,0\,,\,1)$ eindeutig bestimmt. Ist $R \in SO(3)$, so beschreiben die R zugeordneten *Eulerschen Winkel* ϑ,ϕ,ψ die Lage der Bilder

$\mathbf{e}1 := R\,\mathbf{e}1$, $\mathbf{e}2 := R\,\mathbf{e}2$, $\mathbf{e}3 := R\,\mathbf{e}3$ der Standardbasisvektoren $\mathbf{e}1$, $\mathbf{e}2$, $\mathbf{e}3$. Sie sind folgendermaßen definiert:

• ϑ ist der Winkel zwischen den Vektoren $\mathbf{e}3$ und $\mathbf{e}3$, der zwischen $0 \circ$ und $180 \circ$

liegt.

• Falls $\vartheta = \pm\, 0 \circ, 180 \circ$, so definieren wir die *Knotenlinie* g als den Durchschnitt der von $\mathbf{e}1$ und $\mathbf{e}2$ aufgespannten Ebene E und der von $\mathbf{e}1$ und $\mathbf{e}2$ aufgespannten

Ebene E . Sie steht senkrecht auf der von $\mathbf{e}3$ und $\mathbf{e}3$ aufgespannten Ebene.

Dann gibt es genau einen Vektor **v** der Länge 1 auf der Knotenlinie, so daß **e**3 , **e**3 und **v** eine orientierte Basis von R3 bilden.

• ϕ ist dann der Winkel zwischen **e**1 und **v** in der Ebene E, und ψ ist der Winkel zwischen **v** und **e**1 in der Ebene E . Dabei werden ϕ und ψ so gewählt, daß $0 \leq \phi$, $\psi < 360 \circ$ (siehe Bild 6.2).

• Ist $\vartheta = 180 \circ$, so ist R die Drehung um eine Achse in der von **e**1 und **e**2 aufgespannten Ebene E um den Winkel $180 \circ$. In diesem Fall bezeichnen wir diese Achse als Knotenlinie, wählen **v** auf der Knotenlinie so, daß der Winkel ϕ zwischen **e**1 und **v** höchstens $180 \circ$ ist, und setzen $\psi = -\phi$.

• Ist $\vartheta = 0$ so ist R eine Drehung um die Achse R · **e**3 mit einem Winkel, den wir ϕ nennen. In diesem Fall setzen wir $\psi = 0$.

e3

e ’

3

e ’

2

ϑ

E’

e2

ϕ ψ

e ’

1

e1

E

v

Knotenlinie

Bild 6.2

Wir bezeichnen mit

⎛

⎝

cos α

− sin α 0

S

⎞

⎠

3(α) :=

sin α

cos α

0

0

0

1

die Drehung um die Achse R · **e**3 mit Winkel α, und mit

⎛

⎝

1

0

0

S

⎠

⎞

1(α) :=

0

cos α

− sin α

0

sin α

cos α

die Drehung um die Achse R · **e**1 mit Winkel α. Dann gilt

Satz 6.2 *Ist* $R \in SO(3)$ *und sind* ϑ,ϕ,ψ *die* R *zugeordneten Eulerschen Winkel, so*

ist

$R = S_3(\phi) \circ S_1(\vartheta) \circ S_3(\psi)$

Beweis Wir diskutieren den Fall, daß $\vartheta = 0^\circ, 180^\circ$; die anderen Fälle sind trivial.

Setze wie oben $\mathbf{e}_j := R\mathbf{e}_j$ für $j = 1, 2, 3$. Dann liegt der Vektor $S_3(-\phi)\mathbf{e}_3$ in der Ebene senkrecht zu $\mathbf{e}_1$ und bildet den Winkel ϑ mit $\mathbf{e}_3$. Die Vektoren $S_3(-\phi)\,\mathbf{e}_1$ und

.

e3

S (-ϕ) e ’

3

3

ϑ

S (-ϕ) e ’

3

2

e2

E’’

ψ

E

e1

S (-ϕ) e ’

3

1

Bild 6.3

$S\,3(-\phi)\mathbf{e}2$ liegen in der Ebene E senkrecht zu $S\,3(-\phi)\mathbf{e}3$. Diese Ebene E enthält auch den Vektor $\mathbf{e}1$. Der Winkel zwischen $\mathbf{e}1$ und $S\,3(-\phi)\mathbf{e}1$ ist ψ (siehe Bild 6.3).

Dann ist $(S\,1(-\vartheta)\circ S\,3(-\phi))(\mathbf{e}3) = \mathbf{e}3$, und die Vektoren $(S\,1(-\vartheta)\circ S\,3(-\phi))(\mathbf{e}1)$ und $(S\,1(-\vartheta)\circ S\,3(-\phi))(\mathbf{e}2)$ liegen in der Ebene E und sind gegen $\mathbf{e}1$ bzw. $\mathbf{e}2$ um den Winkel ψ gedreht (siehe Bild 6.4).

e3

(S (-ϑ) o S (-ϕ)) (e ’)

1

3

2

ψ

e2

ψ

e1

(S (-ϑ) o S (-ϕ)) (e ’)

1

3

1

Bild 6.4

Folglich ist für $j = 1, 2, 3$

$(S3(-\psi) \circ S1(-\vartheta) \circ S3(-\phi))(\mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_j$ das heißt, $(S3(-\psi) \circ S1(-\vartheta) \circ S3(-\phi) \circ R)(\mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_j$

Deswegen ist

.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.

$R\,\mathbf{e}_j = S3(\phi) \circ S1(\vartheta) \circ S3(\psi)\,\mathbf{e}_j$

für $j = 1, 2, 3$, und somit

$R = S3(\phi) \circ S1(\vartheta) \circ S3(\psi)$

✷

Wir erinnern daran, daß wir eine Teilmenge E einer Gruppe G ein *Erzeugendensystem*

nennen, wenn sich jedes Element g von G in der Form $g = g\varepsilon_1 \circ \cdots \circ g\varepsilon_r$ mit

r

$gi \in E, \varepsilon i \in \{\pm 1\}$ schreiben läßt. Aus Satz 6.2 ergibt sich direkt

Korollar 108 *Die Menge aller Drehungen* $S1(\alpha)$, $0 \leq \alpha < 360^\circ$ *und* $S3(\beta)$, $0 \leq$

$\beta < 360^\circ$ *ist ein Erzeugendensystem f*¨

ur $SO(3)$.

Bemerkungen: (*i*) Aus Satz 6.2 sieht man direkt, daß

$\mathbf{e}1$

$=$

$(\cos\phi\cos\psi - \cos\vartheta\sin\phi\sin\psi\ ,\ \sin\phi\cos\psi + \cos\vartheta\cos\phi\sin\psi\ ,\ \sin\vartheta\sin\psi)$ $\mathbf{e}2$

$=$

$(-\cos\phi\sin\psi - \cos\vartheta\sin\phi\cos\psi\ ,\ -\sin\phi\sin\psi + \cos\vartheta\cos\phi\cos\psi\ ,\ \sin\vartheta\cos\psi)$ $\mathbf{e}3$

$=$

$(\sin\vartheta\sin\phi$

,

$-\sin\vartheta\cos\phi\ ,\ \cos\vartheta)$

Die Matrix R ist die Matrix, die aus den Spaltenvektoren $\mathbf{e}1$, $\mathbf{e}2$, $\mathbf{e}3$ gebildet wird.

(ii) Die Beschreibung von Elementen von $SO(3)$ mit Eulerschen Winkeln ist sehr

anschaulich, das Gruppengesetz in diesen Winkeln auszudrücken, ist aber umständ-

lich (siehe [Miller], sect.7.2, Formel (2.16)).

¨

Ubung: Bestimmen Sie die Eulerschen Winkel von

⎛

√

⎞

1

− 3

3

⎜ 2

√

√ 4

4

⎝

⎜

3

3

− 1 ⎠ !

2

4

√ 4

0

1

3

2

2

..

Ubung: Ist $\mathbf{x} \in S$ 2, so sind die *Polarkoordinaten* ϑ , ϕ des Punktes $\mathbf{x}$ definiert durch

x 1 = sin ϑ cos ϕ

x 2 = sin ϑ sin ϕ

x 3 = cos ϑ

Zeigen Sie: Hat $R \in SO(3)$ die Eulerschen Winkel ϑ,ϕ,ψ, so hat der Punkt R $\mathbf{e}$3 die

Polarkoordinaten $\vartheta = \vartheta$, $\phi = \phi - \pi$!

2

.

.

.

.

6.2 Die Liealgebra $sO(3)$

307

6.2

Die Liealgebra $sO(3)$

Die Bewegung eines starren Körpers, der an einem Punkt befestigt ist, sich um

diesen aber frei drehen kann, beschreibt man meist folgendermaßen: Man wählt

den

Ursprung eines raumfesten Koordinatensystems im Aufhängepunkt des Körpers, und

zeichnet eine “Ruheposition” des Körpers aus. Für jede andere Lage des Körpers

gibt es dann eine eindeutig bestimmte Drehung $R \in SO(3)$, die die Ruheposition

des Körpers auf die gegebene Position des Körpers abbildet (siehe Bild 6.5).

R

O

O

Bild 6.5

Die Bewegung des starren Körpers um den festen Aufhängepunkt wird also durch

eine $SO(3)$- wertige Funktion $t \to R(t)$, d.h. eine Abbildung $R : \mathrm{R} \to SO(3)$,

beschrieben. Für jede Zeit t ist dabei $R(t)$ das Element von $SO(3)$, das die Lage

des Körpers zur Zeit t charakterisiert. Meistens wird die Funktion $t \to R(t)$ diffe-

renzierbar sein (d.h. jeder Eintrag $Rij(t)$ der Matrix $R(t)$ wird eine differenzierbare

Funktion von t sein). Die physikalischen Gesetze für die Bewegung des Körpers wer-

den normalerweise als Differentialgleichungen für $R(t)$ formuliert. In Abschnitt 6.8.1

beschreiben wir ein konkretes Beispiel. Betrachten wir nun also eine differenzierbare

$SO(3)$-wertige Funktion $t \to R(t)$. Wir fragen uns, wie die Ableitung einer

solchen

Funktion aussieht. Da für jedes t 0

d R(t)

= R(t

R(t

dt

t= t

0) ◦ d

0) − 1 ◦ R(t)

0

dt

t= t 0

und

R(t 0) − 1 ◦ R(t) an der Stelle t = t 0 gleich 11 ist, genügt es, die Situation zu betrachten, daß R(t 0) = 11 . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß t 0 = 0. Wie üblich setzen wir ˙

R(t 0) := d R(t)

. Aus der Gleichung

dt

t= t 0

R(t)

◦ R(t) = 11

ergibt sich durch Differenzieren

.

$R(t)$

$\circ R(t) + R(t) \circ \dot{} R(t) = 0$

und somit, da $R(0) = 11$,

.

$R(0)$

$+ \dot{}$

$R(0) = 0$

.
.
.
.
.
.
.

Deshalb definieren wir $sO(3)$ als die Menge aller reellen (3×3)-Matrizen X, für die

X

$= -X$ gilt. Man sagt, die Matrizen X aus $sO(3)$ seien *schiefsymmetrisch* ,

da sie bei Spiegelung an der Hauptdiagonale in ihr Negatives übergehen. Die obige

Rechnung zeigt, daß die Ableitung einer $SO(3)$-wertigen Funktion $t \to R(t)$ mit

$R(0) = 11$ an der Stelle 0 in $sO(3)$ liegt. Allgemeiner gilt

Satz 6.3

(i) Ist $t \to R(t)$ *eine differenzierbare* $SO(3)$ *-wertige Funktion mit* $R(0) =$

11 *, so ist*

.

$R(0) \in sO(3)$.

(ii) $F^{\cdot\cdot}$

ur jedes $X \in sO(3)$ *gibt es eine differenzierbare* $SO(3)$ *-wertige Funktion mit*

$R(0) = 11$ *, so daß* $^{\cdot}$

$R(0) = X$.

(iii) Die Abbildung

$SO(3) \times sO(3) \to sO(3)$

(R, X)

$\to R \circ X \circ R^{-1}$

definiert eine Operation der Gruppe $SO(3)$ *auf* $sO(3)$.

Beweis (i) wurde bereits gezeigt.

(ii) Zunächst verifizieren wir, daß die Menge der Ableitungen $SO(3)$-wertiger Funk-

tionen $R(t)$ mit $R(0) = 11$ einen Untervektorraum im Raum aller (3×3)-Matrizen

bildet. In der Tat ist

$d\, R(\lambda t)$

=

$\lambda \cdot$

d $R(t)$

und

dt

t=0

dt

t=0

d (R

=

.

R

dt

1(t) ◦ R 2(t)) t=0

1(0) ◦ R 2(0) + R 1(0) ◦ ˙

R 2(0) = ˙

R 1(0) + ˙

R 2(0)

wenn R 1(0) = R 2(0) = 11 ist. Deshalb genügt es zu zeigen, daß alle Elemente einer

Basis von $sO(3)$ als Ableitungen einer $SO(3)$-wertigen Funktion wie oben auftreten.

Eine Basis von $sO(3)$ bilden die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

0

0

0

1

0

− 1 0 0

Man verifiziert leicht, daß dies gerade die Ableitungen

d

d

d

S

,

S

,

S

dt

3(*t*) *t*=0

dt

1(*t*) *t*=0

dt

2(*t*) *t*=0

der Drehungen um die x 3- bzw. x 1- bzw. x 2-Achse sind.

(iii) Im Wesentlichen ist zu zeigen, daß für $X \in sO(3)$ und $R \in SO(3)$ die Matrix

$R \circ X \circ R^{-1}$ wieder in $sO(3)$ liegt. Aber

$$(R \circ X \circ R^{-1}) + R \circ X \circ R^{-1} = (R^{-1}) \circ X \circ R + R \circ X \circ R^{-1}$$

$$=$$

$$(R^{-1})$$

$$\circ (-X) \circ R + R \circ X \circ R^{-1}$$

$$=$$

$$-R \circ X \circ R^{-1} + R \circ X \circ R^{-1}$$

$$=$$

$$0$$

.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.

6.2 Die Liealgebra $sO(3)$

Bei der vorletzten Umformung wurde verwendet, daß $R \circ R = 11$, also $R = R^{-1}$.

✷

Man definiert allgemein für eine beliebige Matrixgruppe G die *Liealgebra* g von G

als die Menge aller Matrizen X, die als Ableitungen $\dot{}$

$R(0)$ von G-wertigen differen-

zierbaren Funktionen $R(t)$ mit $R(0) = 11$ auftreten. Stets ist g ein Vektorraum, und

G operiert auf g durch $G \times g \to g$, $(R,X) \to R \circ X \circ R-1$. Diese Operation heißt die

adjungierte Darstellung von G auf g. $sO(3)$ ist also die Liealgebra von $SO(3)$, und

die in Teil (iii) des Satzes beschriebene Operation ist die adjungierte Darstellung der

Gruppe $SO(3)$ auf ihrer Liealgebra $sO(3)$. Ein weiteres Beispiel einer Matrixgrup-

pe und ihrer adjungierten Darstellung werden wir in Abschnitt 6.4 kennenlernen.

Teil (iii) von Satz 6.3 besagt, daß die Gruppe $SO(3)$ durch Konjugation auf ihrer

Liealgebra operiert. Diese Operation kann man noch einmal differenzieren.

Lemma 109 *Sei* $t \to R(t)$ *eine differenzierbare* $SO(3)$ *-wertige Funktion mit* $R(0) =$

11. *Setze* $X = \dot{}$

$R(0)$. *Dann gilt* $f\ddot{}$

ur alle $Y \in sO(3)$

d

$R(t) \circ Y \circ R(t) - 1$

$= X \circ Y - Y \circ X$

dt

$t=0$

Beweis Nach der Produktregel ist

d

d

d

$R(t) \circ Y \circ R(t) - 1$

=

$R(t)$

$\circ Y + Y \circ$

$R(t) - 1$

dt

$t=0$

dt

$t=0$

dt

$t=0$

Nun ist

d $R(t)$

$= X$. Da $R(t) \circ R(t) - 1 = 11$, folgt durch Differenzieren

dt

t=0

X +

d $R(t) - 1$

= 0 , das heißt

d $R(t) - 1$

$= -X$. Damit ergibt sich die

dt

t=0

dt

t=0

Behauptung.

✷

Wir definieren für zwei Elemente X,Y von $sO(3)$ die *Lieklammer* von X und Y als

$[X, Y] := X \circ Y - Y \circ X$

Lemma 109 und Satz 6.3 (ii) implizieren, daß $[X,Y]$ wieder in $sO(3)$ liegt.

✷

..

Ubung: Zeigen Sie, daß für drei Elemente X,Y,Z von $sO(3)$ gilt:

$[X, [Y,Z]] + [Y, [Z,X]] + [Z, [X,Y]] = 0$!

Diese Gleichung heißt die *Jacobi-Identit*¨

at .

Die Lieklammer ist allgemein auf der Liealgebra *g* einer beliebigen Matrixgrup-

pe *G* definiert. Noch allgemeiner definiert man eine abstrakte Liealgebra als einen

Vektorraum g , zusammen mit einer bilinearen Abbildung $[\ ,\ ] : g \times g \to g$, für

die die Jacobi-Identität gilt und $[X,X] = 0$ für alle $X \in g$. Es stellt sich heraus,

daß die Liealgebra einer Matrixgruppe sehr viel Information über die Matrixgruppe

enthält, und daß jede endlichdimensionale abstrakte Liealgebra die Liealgebra einer

Matrixgruppe ist (vgl. [Varadarajan]).

In Abschnitt 2.3.3 haben wir bereits gesehen, daß R3 und das Kreuzprodukt

eine Beziehung zu infinitesimalen Drehungen haben. Dies können wir jetzt genauer

formulieren.

Satz 6.4 *Die Abbildung*

$X : \mathrm{R}3 \to sO(3)$

(

\

(

\

(

\

0

0

0

0

0

1

0

− 1 0

(ω

⎝

⎠

⎝

⎠

⎝

⎠

1 ,ω 2 ,ω 3)

→ ω 1

0

0

− 1 + ω 2

0

0

0

+ ω 3

1

0

0

0

1

0

− 1 0 0

0

0

0

ist ein Vektorraumisomorphismus, und es gilt

(i)

$\omega \times \mathbf{v} = X(\omega) \cdot \mathbf{v}$

(ii)

$X(R \cdot \omega) = R \circ X(\omega) \circ R^{-1}$

(iii)

$X(\omega_1 \times \omega_2) = [X(\omega_1), X(\omega_2)]$

f

ur alle $\omega, \omega_1, \omega_2, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ *und* $R \in SO(3)$. *Dabei ist* $\omega_1 \times \omega_2$ *das Vektorprodukt von* ω_1 *und* ω_2 *, vgl. Abschnitt 2.2.*

Beweis (i) Die Gleichung ist linear in ω, deshalb genügt es, sie für $\omega = (1, 0, 0)$, $\omega =$

(0 , 1 , 0) und ω = (0 , 0 , 1) nachzuprüfen. Dies ist aber trivial.

(ii) Für alle **v** ∈ R3 ist nach Korollar 20 in Kapitel 2 und dem eben bewiesenen

Teil (i)

$R \circ X(\omega) \circ R^{-1} \cdot \mathbf{v} = R(\omega \times (R^{-1} \cdot \mathbf{v})) = R \cdot \omega \times (R \circ R^{-1}) \cdot \mathbf{v} = R \cdot \omega \times \mathbf{v} = X(R \cdot \omega) \cdot \mathbf{v}$ (iii) Seien $\omega_1, \omega_2 \in$ R3. Setze $X_1 = X(\omega_1)$, $X_2 = X(\omega_2)$. Nach Satz 6.3 (ii) gibt es eine $SO(3)$-wertige Funktion $t \to R_1(t)$ mit $R_1(0) = 1_1$ und $\dot{}$

$R_1(0) = X_1$. Dann ist

nach Lemma 109 und dem bereits bewiesenen Teil (ii)

d

d

$X(R$

=

$(R$

= [X

dt

$1(t) \cdot \omega_2)_{t=0}$

dt

$1(t) \circ X_2 \circ R_1(t) - 1)_{t=0}$

$_1, X_2]$

Wegen der Linearität von X und dem eben bewiesenen Teil (i) ist andererseits

d

d

$X(R$

$=$

X

R

dt

$1(t) \cdot \omega\ 2)\ t{=}0$

dt

$1(t) \cdot \omega\ 2\ t{=}0$

$=$

$X(X\ 1 \cdot \omega\ 2) = X(X(\omega\ 1) \cdot \omega\ 2) = X(\omega\ 1 \times \omega\ 2)$

✷

.

.

.

.

.

..

Ubung: Beweisen Sie Teil (iii) von Satz 6.3, wobei Sie nur Teil (i) und (ii) des Satzes

verwenden!

6.3

Die stereographische Projektion

Wir wiederholen zunächst einige Konstruktionen aus Kapitel 3. Die Riemann'sche

Zahlenkugel P1C ist definiert als die disjunkte Vereinigung der komplexen Ebene C

mit einem Punkt, der ∞ genannt wird: P1C = C ∪ *{∞}*. Wir haben gesehen – und

es ist nicht schwer, das direkt nachzuprüfen – daß die Abbildung

$GL(2, \mathrm{C}) \times \mathrm{P1C} \to \mathrm{P1C}$

a

b

$,z$

$\to \phi$

c

d

$A(z)$

wobei

⎧

⎨ $az + b$ für $z = -d, \infty$

$cz + d$

c

$\phi A(z) =$ ⎩ a/c für $z = \infty$, $c = 0$

∞ für $z = -d$ oder $z = \infty, c = 0$

c

eine Operation der Gruppe $GL(2, \mathbb{C})$ aller invertierbaren komplexen (2×2)-Matrizen

auf der Riemann'schen Zahlenkugel $\mathbb{P}1\mathbb{C}$ definiert. Das heißt, daß insbesondere $\phi A \circ B =$

$\phi A \circ \phi B$ und $\phi\, 11 = id$. Die Abbildungen ϕA, $A \in GL(2, \mathbb{C})$ heißen gebrochen lineare

Transformationen oder Möbiustransformationen.

In diesem Abschnitt werden wir eine Bijektion p zwischen der 2-Sphäre

S 2 :=

$\mathbf{x} \in$ R3 x 2 + x 2 + x 2 = 1

1

2

3

und der Riemann'schen Zahlenkugel P1C konstruieren, so daß die Operation von

Matrizen aus $SO(3)$ auf S 2 bei dieser Bijektion gebrochen linearen Abbildungen ϕA

entspricht, die zu Matrizen in

SU (2) :=

$A \in GL(2$, C) $A \circ$ ¯

A = 11 , det A = 1

gehören. Hier bezeichnet A die Matrix, die aus A entsteht, indem man von allen

Einträgen den konjugiert komplexen nimmt.

¨

Ubung:

a

b

i) Zeigen Sie: SU (2) =

_¯

$|a|\ 2 + |b|\ 2 = 1$, $a,b \in$ C !

b

–

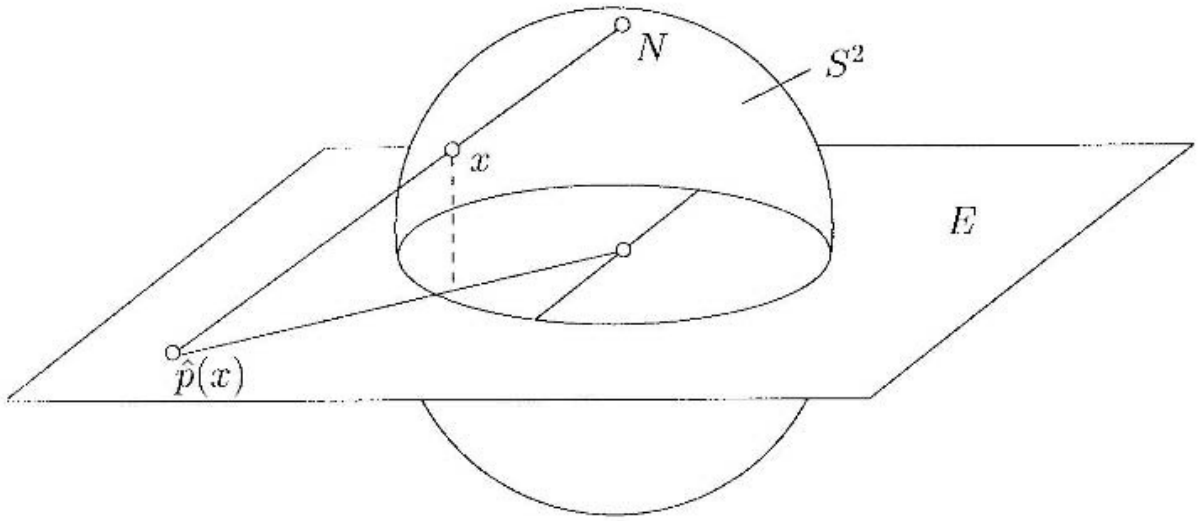
a

ii) Zeigen Sie, daß SU (2) eine Untergruppe von GL(2 , C) ist!

iii) Zeigen Sie: Jedes Element von SU (2) ist in SU (2) konjugiert zu einer Diago-

nalmatrix!

▪
▪
▪
▪
▪



6 Die Geometrie der Gruppe SO(3)

Die Bijektion $p : S\ 2 \longrightarrow$ P1C definiert man folgendermaßen: Für einen Punkt

x auf der 2-Sphäre, der vom Nordpol $N = (0 , 0 , 1)$ verschieden ist, sei ˆ

$p(\mathbf{x})$ der

Durchstoßpunkt der Geraden durch N und **x** mit der Ebene

$E =$

$(\xi 1 ,\xi 2 ,\xi 3) \in R3\ \xi 3 = 0$

(siehe Bild 6.6). In Formeln:

1

ˆ

$p(\mathbf{x}) =$

$(x$

$1 - x$

$1 ,x 2 , 0)$

3

ˆ

p definiert eine Bijektion zwischen $S 2 \setminus \{N \}$ und E, die Umkehrabbildung ist

2

2

ˆ

$p- 1(\xi 1 ,\xi 2 , 0) =$

$\cdot \xi$

$\cdot \xi$

1 + ξ 2 + ξ 2

1 , 1 + ξ 2 + ξ 2

2 , 1 −

2

1 + ξ 2 + ξ 2

1

2

1

2

1

2

Wir identifizieren nun *E* in der üblichen Weise mit der komplexen Ebene C durch

Bild 6.6

Z : *E* → C , (ξ 1 ,ξ 2 , 0) → ξ 1 + *i*ξ 2

Die Abbildung *Z* ◦ ˆ

p : *S* 2 \ {*N* } → C ist dann wieder eine Bijektion. Wir definieren

die *stereographische Projektion*

p : *S* 2 − → P1C = C ∪ {∞}

durch

(*Z* ◦ ˆ

$p)(\mathbf{x})$

falls $\mathbf{x} = N$

$p(\mathbf{x}) =$

∞

falls $\mathbf{x} = N$

Aus dem oben Gesagten ist klar, daß p eine Bijektion ist. In Formeln wird p beschrieben durch

.
.
.
.
.
.
.
.
.
.

6.3 Die stereographische Projektion

313

1

(x

$p(\mathbf{x})$

=

$1 - x\,3$

$1 + ix\,2)$

falls $x\,3 = 1$

∞

falls x 3 = 1

2

Re z,

2

Im z, $|z|$ 2 − 1

falls $z = \infty$

p− 1(z)

=

$|z|$ 2+1

$|z|$ 2+1

$|z|$ 2+1

(6.5)

(0 , 0 , 1)

falls $z = \infty$

Diese Bijektion ist der Grund dafür, daß wir in Kapitel 3 die Menge P1C = C ∪ $\{\infty\}$

als Zahlenkugel“ bezeichnet haben.

”

Jede Drehung $R \in SO(3)$ bildet die Sphäre S 2 auf sich ab. Wir wollen nun

untersuchen, wie die entsprechende Abbildung P1C → P1C , z → p R(p− 1(z))

aussieht. Zunächst betrachten wir den Fall, daß $R = S\,3(\alpha)$ eine Drehung um die

x 3-Achse mit Winkel α ist. Aus der Konstruktion ist klar, daß für $z \in$ P1C

$p\,R(p-1(z))$

$=$

$e^{i\alpha} \cdot z$

falls $z = \infty$

∞

falls $z = \infty$

denn in der komplexen Ebene beschreibt die Multiplikation mit $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \sin\alpha$

gerade die Drehung um 0 um den Winkel α. Die Abbildung $p \circ R \circ p-1$: P1C $-\rightarrow$ P1C

ist also in diesem Fall gleich der gebrochen linearen Abbildung ϕA, wobei

$e^{i\alpha/2}$

0

$A =$

0

$e^{-i\alpha/2}$

In Formeln:

$p \circ S\,3(\alpha) \circ p-1 = \phi$

(6.6)

$e^{i\alpha/2}$

0

0

$e-i\alpha/2$

Man beachte, daß A in der definierten Gruppe $SU(2)$ liegt. Als nächstes betrachten

wir den Fall, daß $R = S2(90\,o)$ die Drehung um den Winkel $90\,o$ um die $x2$-Achse ist.

Dann ist für $\mathbf{x} \in S2$

$\Big($

$\Big)$

$\Big($

$\Big)$

$x1$

$x3$

$R \cdot \Big(x \Big)$

$\Big($

$\Big)$

2

=

$x2$

$x3$

$-x1$

Für $\mathbf{x} = (0 , 0 , 1) , (1 , 0 , 0)$ ist

1

1

$p(\mathbf{x}) =$

$(x$

$(x$

$1 - x$

$1 + ix\ 2)$

und

$p(R \cdot \mathbf{x}) =$

$3 + ix\ 2)$

3

$1 + x\ 1$

Setze

1

$- 1$

$A :=$

1

$\sqrt{2}\ 1\ 1$

Diese Matrix liegt in $SU(2)$. Dann ist

x

$-1 + x$

ϕ

$1 + ix\,2 - 1 + x\,3$

$1 + x\,3 + ix\,2$

$A(\,p(\mathbf{x})) =$

$=$

$x\,1 + ix\,2 + 1 - x\,3$

$1 + x\,1 - x\,3 + ix\,2$

Somit ist

.
.
.
.
.
.

$\phi A(\,p(\mathbf{x}))$

$(\,-1 + x$

$=$

$1 + x\,3 + ix\,2)(1 + x\,1)$

$p(\,R \cdot \mathbf{x})$

$(1 + x\,1 - x\,3 + ix\,2)(\,x\,3 + ix\,2)$

$-1 + x\,2 + x$

=

1

3 + x 1 x 3 + i(x 2 + x 1 x 2) = 1

x 3 + x 1 x 3 − x 2 − x 2 + i(x

3

2

2 + x 1 x 2)

da ja x 2 + x 2 = 1 − x 2. Also ist

3

2

1

p ◦ S 2(90 ◦) ◦ p− 1 = ϕ

(6.7)

1

1

− 1

√ 2 1 1

Die obigen Argumente zeigen, daß es für jede Drehung R in

S :=

S 3(α) α ∈ R

∪ {S 2(90 ◦) }

eine Matrix A in SU (2) gibt, so daß

$p \circ R \circ p- 1 = \phi A$

Sind $R,R \in SO(3)$, so daß es $A,A \in SU$ (2) gibt mit

$p \circ R \circ p- 1 = \phi A$

$p \circ R \circ p- 1 = \phi A$

so ist

$p \circ (R \circ R) \circ p- 1 = \phi A \circ A$

und

$p \circ R- 1 \circ p- 1 = \phi A- 1$

Folglich gibt es für jedes $R \in SO(3)$, das sich in der Form $R = S\varepsilon 1 \circ \cdot \cdot \cdot \circ S\varepsilon r$ mit

1

r

$Si \in S, \varepsilon i \in \{\pm 1 \}$ schreiben läßt, eine Matrix A in SU (2), so daß $p \circ R \circ p- 1 = \phi A$
.

Nun gilt aber

Lemma 110 *Die Menge*

$S :=$

$S 3(\alpha) \alpha \in$ R

$\cup \{S 2(90 \circ) \}$

ist ein Erzeugendensystem von $SO(3)$.

Beweis Nach Korollar 108 bilden die Matrizen

$S\,3(\alpha)$, $\alpha \in \mathrm{R}$ und $S\,1(\beta)$, $\beta \in \mathrm{R}$

ein Erzeugendensystem für $SO(3)$. Nun ist für jedes β

$S\,1(\beta) = S\,2(90\circ) \circ S\,3(\beta) \circ S\,2(90\circ) - 1$

(siehe Bild 6.7) Daraus folgt, daß S ein Erzeugendensystem für $SO(3)$ ist.

✷

Nach dem, was wir vor Lemma 110 gesagt haben, gibt es also für jedes $R \in SO(3)$

ein $A \in SU\,(2)$, so daß $p \circ R \circ p - 1 = \phi A$. Genauer gilt

.

6.3 Die stereographische Projektion

315

x3

x2

x1

S (β)

S

3

(β)

1

Bild 6.7

Satz 6.5 *Es gibt einen surjektiven Gruppenhomomorphismus*

$\rho : SU\,(2) \longrightarrow SO(3)$

so daß f¨

ur alle $A \in SU(2)$

$\rho(A) = p^{-1} \circ \phi A \circ p$

Ferner gilt f¨

ur $A, A \in SU(2)$

$\rho(A) = \rho(A)$

genau dann , wenn $A = \pm A$

Beweis Zunächst zeigen wir, daß für jedes $A \in SU(2)$ die Abbildung

$S^2 \longrightarrow S^2, \mathbf{x} \to p^{-1} \circ \phi A \circ p(\mathbf{x})$

von der Form $\mathbf{x} \to R \cdot \mathbf{x}$ mit $R \in SO(3)$ ist. Dieses Element R von $SO(3)$ ist dann natürlich eindeutig.

Sei also $A \in SU(2)$. Das Polynom $f(\lambda) := \det(A - \lambda 1 1)$ (das charakteristische Polynom von A) hat Grad 2 in λ. Sei $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von f . Dann gibt es einen von $\mathbf{0}$ verschiedenen Vektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{C}^2$ so daß $(A - \lambda_0 1 1) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$, d.h.

$A \cdot \mathbf{v} = \lambda_0 \mathbf{v}$

Setze

v

$z :=$

$1/v_2$

falls $v_2 = 0$

∞

falls $v\,2 = 0$

Indem man Bemerkung 27 anwendet oder direkt nachrechnet, sieht man, daß

$\phi A(\,z) = z$

Setze

.

ˆ

$\mathbf{x} := p-1(\,z)$

Wähle nun $S \in SO(3)$ so, daß $S\cdot\hat{}$

$\mathbf{x} = N = (0\,,\,0\,,\,1)$. Nach dem, was wir oben bewiesen

haben, gibt es $B \in SU\,(2)$ so daß

$\phi B = p \circ S \circ p-1$

Dann ist

$\phi B(\,z) = p \circ S \circ p-1\,(\,z) = p(\,S \cdot \hat{}$

$\mathbf{x}) = p(\,N\,) = \infty$

Setze

$A = B \circ A \circ B-1$

Dies ist ein Element von $SU\,(2)$, und es gilt

$\phi A\,(\,\infty) = \phi B \circ \phi A \circ \phi-1(\,\infty) = \infty$

B

Schreibe

a

b

$A =$

$\_^{-}$

mit $a, b \in \mathbb{C}$, $|a|^2 + |b|^2 = 1$

b

$\_$

a

Da $\phi A(\infty) = \infty$ ist $b = 0$. Somit hat A die Gestalt

$e^{i\alpha}$

0

$A =$

mit $\alpha \in \mathbb{R}$

0

$e^{-i\alpha}$

Mit (6.6) folgt daraus, daß

$p^{-1} \circ \phi A \circ p = S^3(2\alpha)$

Deshalb ist

$p^{-1} \circ \phi A \circ p = p^{-1} \circ \phi(B^{-1} \circ A \circ B) \circ p = p^{-1} \circ \phi^{-1} \circ \phi$

B

$A \circ \phi B \circ p$

$=$

$p^{-1} \circ \phi^{-1} \circ p \circ p^{-1} \circ \phi$

B

$A \circ p \circ p^{-1} \circ \phi B \circ p$

$= S^{-1} \circ S\, 3(2\,\alpha) \circ S$

ein Element von $SO(3)$. Wir definieren jetzt $\rho : SU(2) \to SO(3)$, indem wir je-

dem $A \in SU(2)$ das eindeutig bestimmte Element $R = \rho(A)$ von $SO(3)$ zuordnen,

für das $R \cdot \mathbf{x} = (p^{-1} \circ \phi A \circ p)(\mathbf{x})$ für $\mathbf{x} \in S\,2$ gilt. Es ist leicht nachzurechnen, daß ρ ein Gruppenhomomorphismus ist. Die Surjektivität von ρ haben wir bereits

in den Überlegungen vor der Formulierung von Satz 6.5 bewiesen. Ist schließlich

$\rho(A) = \rho(A)$, so setze $B := A^{-1} \circ A$. Dann ist $\rho(B) = 11$, also $\phi B = \mathrm{id}$. Daraus folgt, daß $B = \pm 11$, also $A = \pm A$. Damit ist Satz 6.5 bewiesen.

✷

.
.
.
.
.
.
.

6.3 Die stereographische Projektion

Bemerkung 111 *(Erg¨*

anzung zu Satz 6.5)

i)

$e i\alpha$

0

ρ

=

S

0

$e-i\alpha$

3(2 α)

für alle $\alpha \in$ R , und

1

1

− 1

ρ

√

=

S 2(90 ◦)

2

1

1

ii) Die Gruppe $SU(2)$ wird von den Matrizen

1

√

1

− 1

$e^{i\alpha}$

0

und

, $\alpha \in \mathbb{R}$

2

1

1

0

$e^{-i\alpha}$

erzeugt.

Beweis: Teil (i) folgt direkt aus (6.6) und (6.7). Zum Beweis von (ii) sei

E

$e^{i\alpha}$

0

1

-1

$=$

$\alpha \in \mathrm{R}$

$\cup$

1

$\sqrt{}$

0

$e-i\alpha$

2

1

1

und

$H :=$

$A\varepsilon 1 \circ A\varepsilon 2 \circ \cdots \circ A\varepsilon r$

A

1

2

r

$j \in E$, $\varepsilon j \in \{\pm 1\}$, $r \in \mathrm{N}$

Dann ist H eine Untergruppe von $SU(2)$. Wir müssen zeigen, daß $H = SU(2)$. Nach

(i) und Lemma 110 ist

$\rho(A)\, A \in E$

ein Erzeugendensystem für $SO(3)$. Somit gibt

es für jedes Element R von $SO(3)$ Matrizen $A_1, \cdots, A_r$ in E und $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_r \in \{\pm 1\}$

so daß

$R = \rho(A_1)\, \varepsilon_1 \circ \cdots \circ \rho(A_r)\, \varepsilon_r = \rho(A_{\varepsilon_1} \circ \cdots \circ A_{\varepsilon_r})$

Deshalb ist

$\rho(H) = SO(3)$

Sei nun $A \in SU(2)$. Da $\rho(H) = SO(3)$, gibt es $A \in H$ so daß $\rho(A) = \rho(A)$. Nach Satz 6.5 ist $A = \pm A$. Da

$$\begin{pmatrix} e^{i\pi} & 0 \\ 0 & e^{-i\pi} \end{pmatrix} = \mathbb{1}$$

in E liegt, ist $A = (\pm \mathbb{1}) \circ A$ in H. Dies zeigt, daß $H = SU(2)$.

✷

Aus Satz 6.5 ergibt sich

Korollar 112 *Sei K ein Kreis auf der 2-Sph¨*

are S 2 *. Falls K durch den Nordpol N*

geht, ist ˆ

p(*K* − {*N* }) *eine Gerade in der Ebene E. Falls K nicht durch den Nordpol*

N geht, ist ˆ

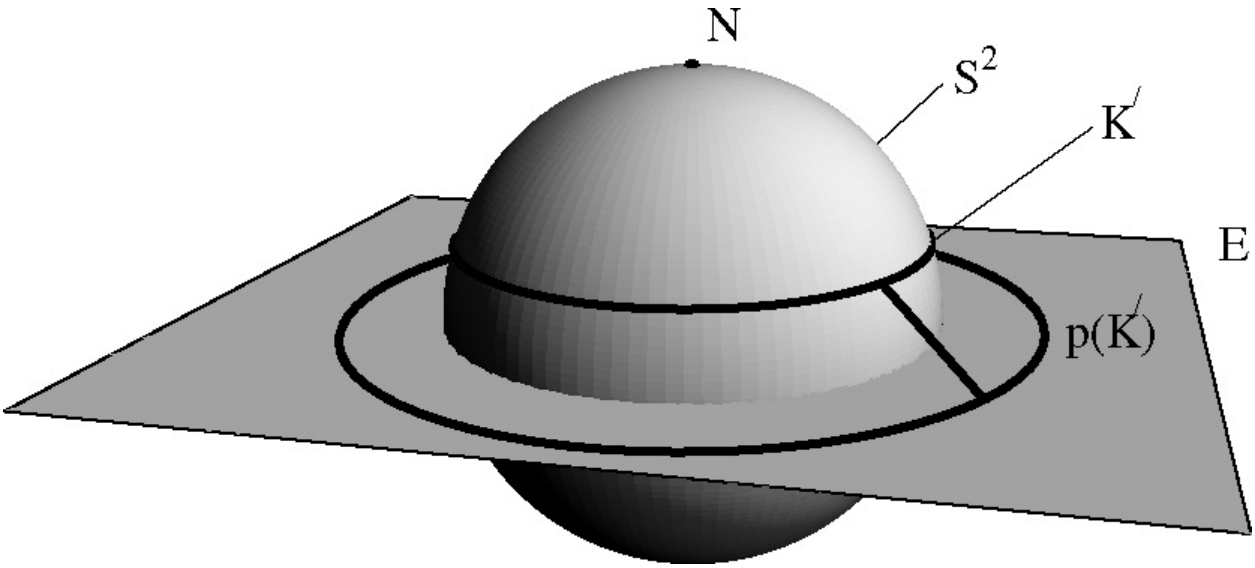
p(*K*) *ein Kreis in der Ebene E.*

Beweis Der Kreis *K* ist der Durchschnitt einer Ebene *F* mit *S* 2. Falls *K* durch *N*

geht, so ist

ˆ

$p(\hat{K} - \{N\}) = E \cap F$



F

N

E

S2

Bild 6.8

(vgl. Bild 6.8). Wir betrachten nun den Fall, daß K nicht durch N geht. Wähle

eine Drehung $R \in SO(3)$, die F auf eine zu E parallele Ebene F abbildet. Dann ist

$K = R(K)$ ein ”Breitenkreis“ auf S 2. Es ist klar, daß das Bild von K unter der

stereographischen Projektion p ein Kreis in C mit 0 als Mittelpunkt ist (siehe Bild

6.9). Nach Satz 6.5 gibt es $A \in SU(2)$, so daß $\rho(A) = R-1$. Dann ist

$p(K) = p(R-1(K)) = (p \circ \rho(A))(K) = \phi A(p(K))$ Wie wir eben gesehen haben, ist $p(K)$ ein Kreis in C. Da gebrochen lineare Trans- Bild 6.9

formationen Kreise und Geraden in Kreise oder Geraden überführen (Proposition

42), ist dann auch $p(K) = \phi A(p(K))$ ein Kreis oder eine Gerade. Da $p(K)$ kompakt ist, ist es ein Kreis.

✷

.

6.3 Die stereographische Projektion

319

Bemerkung 113 Manche Autoren verwenden zur Konstruktion von ρ die stereo-

graphische Projektion vom Nordpol N aus auf die Ebene $\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_3 =$

$-1 \}$ (siehe Bild 6.10).

Bild 6.10

Diese Abbildung unterscheidet sich von der hier betrachteten Abbildung p nur um

den Faktor 2.

¨

Ubung: Sei $\sigma : (x_1, x_2, x_3) \to (x_1, x_2, -x_3)$ die Spiegelung an der (x_1, x_2) - Ebene.

Bestimmen Sie die Abbildung $p \circ \sigma \circ p^{-1}$ und geben Sie eine geometrische Interpre-

tation ihrer Einschränkung auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$!

¨

Ubung: Wie oben bezeichne ˆ

$p : S^2 \setminus \{N\} \to E$ die stereographische Projektion.

i) Sei $\mathbf{x} \in S^2 \setminus \{N\}$, g eine Tangentialgerade an S^2 im Punkt $\mathbf{x}$, h die Verbin-

dungsgerade von $\mathbf{x}$ und ˆ

$p(\mathbf{x})$, und ˆ

$p(g)$ die Schnittgerade der Ebene E mit der

Ebene durch g und N (siehe Bild 6.11). Beweisen Sie, daß die Gerade h mit

der Geraden g den gleichen Winkel einschließt wie mit der Geraden ˆ

$p(g)$!

ii) Sei K ein Kreis auf S^2, der nicht durch N geht. Dann gibt es einen Punkt M im

Raum, so daß alle Tangenten von M aus an S^2 die Sphäre S^2 in Punkten von

K treffen (siehe Bild 6.12). Zeigen Sie, daß ˆ

p(*K*) ein Kreis mit Mittelpunkt

ˆ

p(*M*) ist! Hier bezeichnet ˆ

p(*M*) den Durchstoßpunkt der Geraden durch *N*

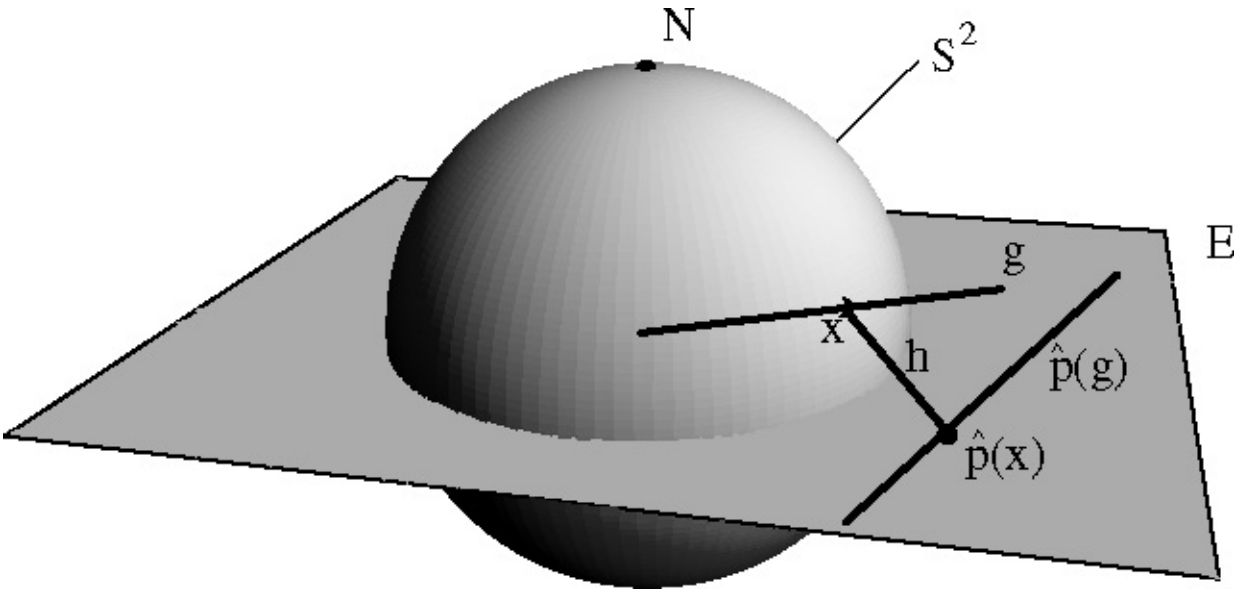
und *M* mit der Ebene *E*.

iii) Verwenden Sie (i), um zu zeigen, daß ˆ

p winkeltreu ist! Wegen der Winkel-

treue wird die stereographische Projektion manchmal bei der Erstellung von

Landkarten verwendet.



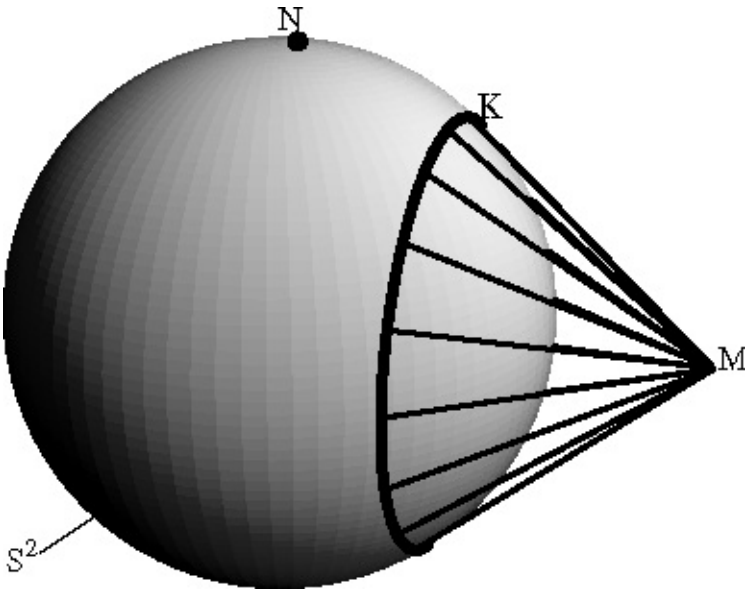


Bild 6.11

Bild 6.12

6.4

Die Pauli-Matrizen

Den im vorigen Abschnitt beschriebenen Homomorphismus

$\rho : SU(2) \longrightarrow SO(3)$

kann man auch auf algebraische Weise konstruieren. Dazu sei $sU(2)$ die Menge aller

komplexen (2×2)-Matrizen X für die

X

$= - \overline{}$

X

und

Spur $X = 0$

Wir erinnern daran, daß die *Spur* einer Matrix die Summe ihrer Diagonalelemente

ist, d.h.

a

Spur

11

a 12

$= a$

a

11 + a 22

21

a 22

Lemma 114 *Die Abbildung*

$SU(2) \times sU(2) \to sU(2)$

(A, X)

$\to A \circ X \circ A^{-1}$

definiert eine Operation der Gruppe $SU(2)$ *auf* $sU(2)$.

.

.

.

6.4 Die Pauli-Matrizen

Beweis Im Wesentlichen ist zu zeigen, daß für $X \in sU(2)$, $A \in SU(2)$ die Matrix

$A \circ X \circ A - 1$ wieder in $sU(2)$ liegt. Nun ist

$(A \circ X \circ A - 1) + (A \circ X \circ A - 1) = (A - 1) \circ X \circ A + \overline{}$

$A \circ \overline{}$

$X \circ \overline{}$

$A - 1$

Da A

$\circ \overline{}$

$A = 11$, ist A

$= \overline{}$

$A - 1$ und $(A) - 1 = (A - 1)$

$= \overline{}$

A . Somit ist

$(A \circ X \circ A - 1)$

$+$

$(A \circ X \circ A - 1) = \overline{}$

$A \circ X \circ \overline{}$

$A - 1 + \overline{}$

$A \circ \overline{}$

$X \circ^{-}$

A^{-1}

$=$

$-$

$A \circ (X +^{-}$

$X) \circ^{-}$

A^{-1}

$=$

0

Ferner ist

$\mathrm{Spur}(A \circ X \circ A^{-1}) = \mathrm{Spur}(X) = 0$

da sich die Spur einer Matrix bei Konjugation nicht ändert.

✷

$sU(2)$ ist – bezüglich Addition von Matrizen und komponentenweiser Skalarmulti-

plikation – ein reeller Vektorraum. Sind $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ die *Pauli-Matrizen*

0

1

0

$-i$

1

0

$\sigma 1 :=$

,

$\sigma 2 :=$

,

$\sigma 3 :=$

1

0

i

0

0

-1

so bilden $i \cdot \sigma 1$,$i \cdot \sigma 2$,$i \cdot \sigma 3$ eine Basis dieses Vektorraums. Für jedes $A \in SU$ (2) ist

die Abbildung

sU (2)

$\rightarrow sU(2)$

X

$\rightarrow A \circ X \circ A - 1$

eine lineare Abbildung. Wie in Satz 6.3 zeigt man, daß sU (2) die Menge der Ablei-

tungen

.

$A(0)$ differenzierbarer $SU(2)$-wertiger Funktionen $t \to A(t)$ mit $A(0) = 11$

ist. $sU(2)$ ist also die Liealgebra von $SU(2)$, und die in Lemma 114 definierte Ope-

ration ist die adjungierte Darstellung. Mit Hilfe der adjungierten Darstellung von

$SU(2)$ auf dem dreidimensionalen Vektorraum $sU(2)$ können wir die Abbildung

$\rho : SU(2) \longrightarrow SO(3)$ elegant beschreiben.

Satz 6.6 *Sei* $X : \mathrm{R}3 \to sU(2)$ *die Abbildung* $(x_1, x_2, x_3) \to i(x_1\sigma_1 - x_2\sigma_2 + x_3\sigma_3)$.

Dann gilt f¨

ur alle $A \in SU(2)$ *und alle* $\mathbf{x} \in \mathrm{R}3$

$\rho(A) \cdot \mathbf{x} = X^{-1} A \circ X(\mathbf{x}) \circ A^{-1}$

Mit anderen Worten: Die Konjugation mit A in sU (2) *entspricht unter der Abbildung*

X der Drehung $\rho(A)$ *in* R3 .

Beweis Für jedes $A \in SU(2)$ ist

~

$\rho(A) : \mathrm{R}3 \to \mathrm{R}3$

$\mathbf{x}$

$\to X^{-1} A \circ X(\mathbf{x}) \circ A^{-1}$

.

.

.

.

.

eine lineare Abbildung von R3 auf sich, wird also durch eine Matrix beschrieben, die

wir auch mit ˜

$\rho(A)$ bezeichnen. Da $(A,X) \to A \circ X \circ A^{-1}$ eine Gruppenoperation von

$SU(2)$ auf $sU(2)$ ist, ist ˜

ρ ein Gruppenhomomorphismus von $SU(2)$ in die Gruppe

$GL(3, \mathrm{R})$ der invertierbaren reellen (3×3)-Matrizen. Wir wollen zeigen, daß ˜

$\rho = \rho$.

Dazu genügt es, zu zeigen, daß ˜

$\rho(A) = \rho(A)$ für alle A in einem Erzeugendensystem

von $SU(2)$. Nach Lemma 110 erzeugen die Matrizen

$ei\alpha$

0

1

1

− 1

mit $\alpha \in \mathrm{R}$ und

√

0

$e-i\alpha$

2

1

1

die Gruppe SU (2). Nun ist

− 1

$ei\alpha$

0

◦

0

e 2 $i\alpha$

σ 1 ◦

$ei\alpha$

0

=

$= (\cos 2\alpha)\sigma 1 - (\sin 2\alpha)\sigma 2$

0

$e{-}i\alpha$

0

$e{-}i\alpha$

$e{-}2i\alpha$

0

-1

$ei\alpha$

0

∘

0

$-ie2i\alpha$

$\sigma 2$ ∘

$ei\alpha$

0

=

$= (\sin 2\alpha)\sigma 1 + (\cos 2\alpha)\sigma 2$

0

$e{-}i\alpha$

0

$e-i\alpha$

$ie-2\,i\alpha$

0

-1

$ei\alpha$

0

$\circ\,\sigma\,3\circ ei\alpha$

0

$=$

$\sigma\,3$

0

$e-i\alpha$

0

$e-i\alpha$

Also ist

$ei\alpha$

0

$ei\alpha$

0

~

ρ

0

$e-i\alpha$

$= S\ 3(2\ \alpha) = \rho$

0

$e-i\alpha$

Ebenso ist

−

1

1

√

1

− 1

1

◦

1

− 1

σ 1 ◦

√

=

$-\sigma$ 3

2

1

1

2

1

1

−

1

1

√

1

− 1 ◦

1

− 1

σ 2 ◦

1

√

=

σ 2

2

1

1

2

1

1

−

1

1

√

1

− 1 ◦

1

− 1

σ 3 ◦

1

√

=

σ 1

2

1

1

2

1

1

Also ist

1

1

− 1

1

1

− 1

~

ρ

√

$= S\ 2(90\ \circ) = \rho$ √

2

1

1

2

1

1

✷

Korollar 115 *Ist* $A \in SU(2)$ *, so ist für* $j = 1, 2, 3$

3

$(-1)^{j+1} A \sigma_j A^{-1} =$

$\rho(A)_{ij} (-1)^{i+1} \sigma_i$

$i=1$

Dabei bezeichnet $\rho(A)_{ij}$ *den Eintrag der* (3×3) *-Matrix* $\rho(A)$ *in der i-ten Zeile und der j-ten Spalte.*

.

.

.

.

6.4 Die Pauli-Matrizen

Beweis

$(-1)^{j+1} A \sigma_j A^{-1} = A X(e_j) A^{-1} = X(\rho(A) e_j)$

3

3

=

X

$\rho(A)_{ij} e_i$

=

$\rho(A)_{ij} (-1)^{i+1} \sigma_i$

$i=1$

$i=1$

✷

Bemerkung 116 $SO(3)$ ist die Menge der reellen $(3 \times 3) -$ Matrizen mit Determi-

nante 1, die das Skalarprodukt auf R3 invariant lassen. Man kann leicht nachrechnen,

daß unter dem Vektorraumisomorphismus X : R3 $\rightarrow$ sU (2) das Skalarprodukt in

R3 der auf $sU(2)$ definierten symmetrischen Bilinearform

$$(X , Y) := - 1 \text{ Spur } (X \circ Y)$$

(6.8)

2

entspricht, das heißt

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = (X (\mathbf{x}) , X (\mathbf{y}))$$

für alle $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in$ R3

Allgemein definiert (6.8) eine Bilinearform auf der Liealgebra g einer Matrixgruppe

G, denn es ist ja stets

$$\text{Spur } (X \circ Y) = \text{Spur } (Y \circ X)$$

Diese Bilinearform heißt die *Killingform* auf g (nach dem Mathematiker Wilhelm

Killing (1847 - 1923)). Sie ist stets invariant unter der adjungierten Darstellung,

denn

$$\text{Spur } (X \circ Y) = \text{Spur } (A \circ (X \circ Y) \circ A- 1) = \text{Spur } ((A \circ X \circ A- 1) \circ (A \circ Y \circ A- 1))$$

Bemerkung 117 Korollar 115 ermöglicht es, für beliebiges $A \in SU$ (2) das Bild

$\rho(A)$ auszurechnen. Es ergibt sich: Ist

$\alpha + i\beta$

$-\gamma + i\delta$

$A =$

mit $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathrm{R}$

$\gamma + i\delta$

$\alpha - i\beta$

so ist

$\left(\right.$

$\backslash$

$\alpha 2 - \beta 2 - \gamma 2 + \delta 2$

$- 2 \alpha\beta + 2 \gamma\delta$

$2 \alpha\gamma + 2 \beta\delta$

$\rho(A) = \backslash$

$2 \alpha\beta + 2 \gamma\delta$

$\alpha 2 - \beta 2 + \gamma 2 - \delta 2$

$- 2 \alpha\delta + 2 \beta\gamma$

$\left.\right)$

$- 2 \alpha\gamma + 2 \beta\delta$

$2 \alpha\delta + 2 \beta\gamma$

$\alpha 2 + \beta 2 - \gamma 2 - \delta 2$

.

.

..

Ubung:

(i) Zeigen Sie

$2 \cdot 11$ falls $j = k$

$\sigma j \circ \sigma k + \sigma k \circ \sigma j =$

0

falls $j = k$!

(ii) Zeigen Sie:

$\sigma 1 \circ \sigma 2 = i\sigma 3$, $\sigma 2 \circ \sigma 3 = i\sigma 1$, $\sigma 3 \circ \sigma 1 = i\sigma 2$

(iii) Zeigen Sie:

$X(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 1 (X(\mathbf{v}) \circ X(\mathbf{w}) - X(\mathbf{w}) \circ X(\mathbf{v})) = [X(\mathbf{v}) , X(\mathbf{w})]$

2

für alle $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in$ R3! Dabei bezeichnet $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ das Vektorprodukt von $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$; vgl Kapitel 2.

(iv) Konstruieren Sie einen Vektorraumisomorphismus $F : sU(2) \to sO(3)$, so daß

$F([X,Y]) = [F(X), F(Y)]$ für alle $X,Y \in sU(2)$!

(v) Was ist die Killingform auf $sO(3)$?

..

Ubung: Sei $R \in SO(3)$ die Drehung mit den Eulerschen Winkeln ϑ,ϕ,ψ .

Bestimmen

Sie $A \in SU(2)$ so daß $\rho(A) = R$!

6.5

Ein Weg in $SO(3)$**, der nicht zusammenziehbar ist**

In diesem Abschnitt wollen wir eine interessante topologische Eigenschaft von $SO(3)$

vorstellen, nämlich die, daß es in $SO(3)$ einen geschlossenen Weg w gibt, der nicht

zusammenziehbar ist, daß aber der Weg, den man erhält, wenn man w zweimal

durchläuft, zusammenziehbar ist (siehe Bild 6.13).

nicht zusammenziehbar

zusammenziehbar

Bild 6.13

Um diese Aussage zu präzisieren, machen wir einige Definitionen.

Definition 118 *Sei X eine Teilmenge von* R *n (oder allgemeiner, ein metrischer*

Raum, oder, noch allgemeiner, ein topologischer Raum) und x_0 *ein Punkt von X.*

Ein geschlossener Weg *in X mit Anfangs- und Endpunkt* x_0 *ist eine stetige Abbildung*

$w : [0, 1] \longrightarrow X$

so daß $w(0) = w(1) = x_0$. *Der Weg w heißt* zusammenziehbar , *falls es eine*

stetige

Abbildung

$h : [0 , 1] \times [0 , 1] \longrightarrow X$

gibt, so daß

$h(t, 0) = w(t)$

$f^{\cdot}$

ur alle $t \in [0 , 1]$

$h(0 ,s) = h(1 ,s) = x\ 0$

$f^{\cdot}$

ur alle $s \in [0 , 1]$

$h(t, 1) = x\ 0$

$f^{\cdot}$

ur alle $t \in [0 , 1]$

Bemerkung 119 In der obigen Situation bildet h die Seiten $\{ 0 \} \times [0 , 1]$, $[0 , 1] \times \{ 1 \}$

und $\{ 1 \} \times [0 , 1]$ des Quadrats $[0 , 1] \times [0 , 1]$ auf $x\ 0$ ab. Setzt man $hs(t) := h(t,s)$, so ist für jedes $s \in [0 , 1]$ die Abbildung $hs : [0 , 1] \rightarrow X$ ein geschlossener Weg mit Anfangs-und Endpunkt $x\ 0$. $h\ 0$ ist der Weg w, während $h\ 1(t) = x\ 0$ für alle $t \in [0 , 1]$ ist. Der Weg w ist also zusammenziehbar, wenn es eine stetige Familie“ von Wegen h

”

s gibt,

die w mit dem k onstanten Weg $h\ 1(t) = x\ 0$ verbinden.

s

1

s

t

0

1

Bild 6.14

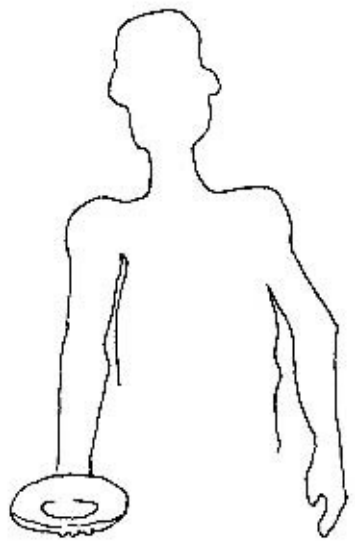
..

Ubung: Zeigen Sie, daß jeder Weg in R3 mit Anfangs- und Endpunkt **0** zusammenziehbar ist!

SO(3) besteht aus (3 × 3)-Matrizen, kann also als eine Teilmenge von R3 × 3 = R9 aufgefaßt werden. Deshalb sind die obigen Definitionen auf *SO*(3) anwendbar.

Was wir am Anfang dieses Abschnitts angedeutet haben, können wir jetzt exakt formulieren. Wir bezeichnen mit *S* 3(*α*) die Drehung

▪



⎛

⎝

cos α

− sin α 0

S

⎞

⎠

3(α) =

sin α

cos α

0

0

0

1

um die x 3 − Achse mit Winkel α.

Satz 6.7

(i) Der Weg w 1 : [0 , 1] → SO(3) , t → S 3(t· 360 ◦) *in* SO(3) *mit Anfangs-und Endpunkt* 11 *ist nicht zusamenziehbar.*

(ii) Der Weg w 2 : [0 , 1] → SO(3) , t → S 3(2 t · 360 ◦) *in* SO(3) *mit Anfangs-und Endpunkt* 11 *ist zusammenziehbar.*

Der Weg w 2 entsteht aus dem Weg w 1, indem man w 1 - mit doppelter Geschwindig-

keit - zweimal durchläuft. Wir beschreiben in diesem Abschnitt eine gymnastische

„

Übung“, die Satz 6.7 plausibel macht (in Abschnitt 6.6 skizzieren wir einen mathe-

matisch exakten Beweis):

Halten Sie zunächst den rechten Arm senkrecht nach unten und winkeln Sie die

Hand mit der Handfläche nach oben an, so daß die Finger nach vorne zeigen (siehe

Bild 6.15). Diese Lage des Arms nennen wir die R uhelage. Stellen Sie sich vor, daß

Bild 6.15 Ruhelage

an jedem Punkt des rechten Arms ein Dreibein“ (d.h. eine Orthonormalbasis von

„

R3) so befestigt ist, daß die x 3-Achse des Dreibeins nach oben (parallel zum Arm),

die x 1-Achse nach vorne (parallel zu den Fingern) und die x 2-Achse zum Körper hin

zeigt. Parametrisieren Sie den Arm (oder genauer, einen Weg auf dem Arm) von der

Schulter bis zur Hand durch $t \in [0 , 1]$. Einer beliebigen Stellung des Armes entspricht

dann eine stetige Abbildung $[0 , 1] \longrightarrow SO(3)$, $t \to R(t)$. Es gibt nämlich genau eine

Drehung $R(t) \in SO(3)$, die das Dreibein an der Schulter in ein Dreibein überführt,

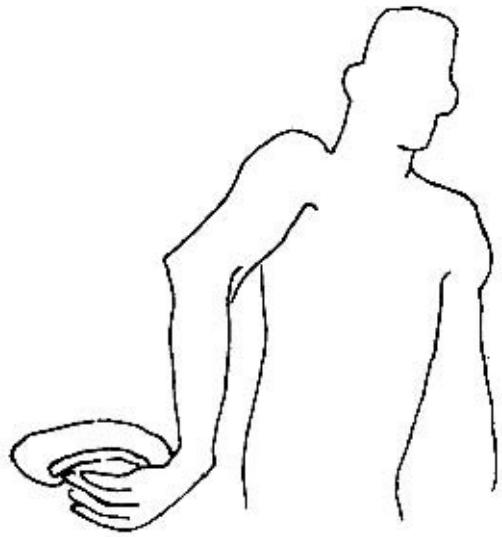
das parallel zum Dreibein an der Stelle t des Armes ist. Falls bei der Stellung des

Arms die Handfläche nach oben und die Finger nach vorne zeigen, so ist das am

weitesten außen liegende Dreibein an der Hand ($t = 1$) parallel zum letzten Dreibein

an der Schulter. In diesem Fall ist $R(1) = 11$ und R ein geschlossener Weg.

▪



6.5 Ein Weg in $SO(3)$, der nicht zusammenziehbar ist

Bild 6.16 Handfläche gegenüber der Ruhelage um 360 ◦ gedreht

Betrachten wir die Stellung des Armes, die entsteht, wenn man die Handfläche

gegenüber der Ruhelage um 360 ◦ dreht (siehe Bild 6.16). Falls die Parametrisierung

des Armes geeignet gewählt war, stimmt der zugehörige Weg $t \to R(t)$ mit $t \to$

$S\,3(t \cdot 360\,\circ) = w\,1(t)$ überein. Nehmen wir nun an, dieser Weg sei zusammenziehbar.

Dann gäbe es eine stetige Familie Rs von geschlossenen Wegen $t \to Rs\,(t)$ in SO (3)

mit Anfangs- und Endpunkt 11 ($s \in [0\,,1]$), so daß $R\,0(t) = R(t)$ und $R\,1(t) =$ 11 für alle $t \in [0\,,1]$. Fassen wir s als Zeit auf, so könnte man zu jeder Zeit s den Arm in

eine Lage bringen, die den Weg $t \to Rs(t)$ repräsentiert. Dadurch entstünde eine

Bewegung des Armes, bei der Schulter und Hand stets in dieselbe Richtung

wiesen

und der Arm

entdreht“ würde. Probieren Sie, es geht nicht! Das überzeugt Sie

”

vielleicht, daß der Weg $t \to R(t)$ nicht zusammenziehbar ist. Dies entspricht Teil (i)

von Satz 6.7. Damit ist die erste Übung beendet.

Der Weg $[0, 1] \xrightarrow{-} SO(3)$, $t \to S3((2t) \cdot 360^\circ)$ ist in der Praxis kaum durch eine Armstellung zu realisieren. Er entspräche ja der Situation, daß die Hand gegenüber

der Ausgangslage um 720° gedreht wäre. Deshalb schlagen wir eine andere Übung

vor, die deutlich macht, daß der Weg $t \to S3((2t) \cdot 360^\circ)$ zusammenziehbar ist.

Drehen Sie wie in der ersten Übung die Handfläche um 360° um die x 3-Achse! Dies ist

die Ausgangslage der zweiten Übung. Ihr entspricht wieder der Weg $t \to S3(t \cdot 360^\circ)$.

Führen Sie nun die Hand über den Kopf, wobei Sie die Handfläche immer nach oben

halten und sie gleichzeitig noch einmal um 360° drehen. Am Ende der Bewegung

gelangen Sie zur Ruhestellung des Armes (siehe Bild 6.17). Der Teller, den Sie bei

dieser Übung vielleicht in der Hand hatten, ist hoffentlich nicht heruntergefallen!

$R(t,s)$ sei die Drehung in $SO(3)$, die dem Dreibein an der Stelle t des Armes zur

Zeit s der Übung entspricht. Die stetige Abbildung

$[0 , 1] \times [0 , 1] \longrightarrow SO(3)$

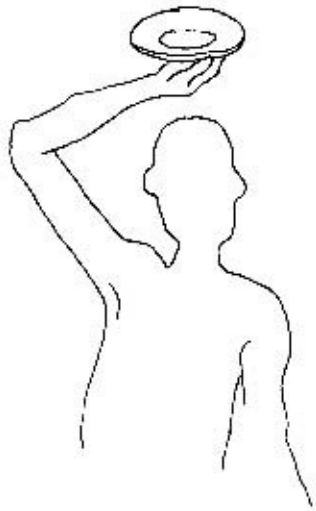
(t , s)

$\longrightarrow R(t,s)$

hat, wenn die Parametrisierung mit der Zeit s geeignet gewählt war, die folgenden

Eigenschaften:

▪



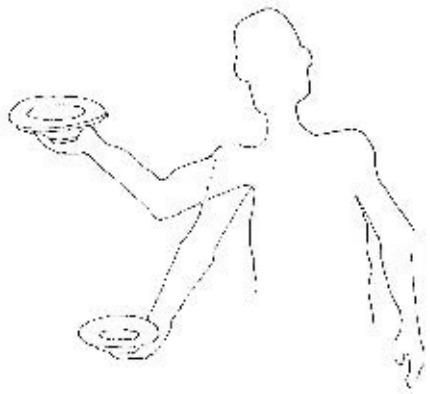


Bild 6.17

i)

$(t,s) \to R(t,s)$ ist stetig

ii)

$R(t, 0) = S3(t \cdot 360\circ)$

(dies entspricht der Ausgangslage des Arms

bei der zweiten Übung)

iii)

$R(1, s) = S3(s \cdot 360\circ)$

(im Verlauf der Übung wird die Hand

um 360 ◦ gedreht)

iv)

$R(t, 1) = 11$

(am Ende der Übung ist der Arm gerade)

v)

$R(0\ ,s) = 11$

(die Schulter hat sich nicht bewegt) (6.9)

s

1I

1

1I

S (s.360o)

3

t

0

S (t.360o)

1

3

Bild 6.18

Unten werden wir eine stetige Abbildung

$F : [0\ ,\ 1] \times [0\ ,\ 1] -\rightarrow : [0\ ,\ 1] \times [0\ ,\ 1]$

konstruieren, so daß

.

.

.

.

6.6 Die Fundamentalgruppe

329

$F(t, 0)$

$=$

$(2t, 0)$

für $0 \leq t \leq 12$

$F(t, 0)$

$=$

$1, 2(t - 1)$

für $1 \leq t \leq 1$

2

2

$F((\{0\} \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times \{1\}) \cup (\{1\} \times [0, 1])) \subset (\{0\} \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times \{1\})$ (6.10)

s

s

1

1

F

t

t

0

1

0

/2

1

1

Bild 6.19

Aus (6.9) und (6.10) folgt dann, daß für

$h := R \circ F$

gilt

$h(t, 0) = S\,3\,((2\,t) \cdot 360\,\circ)$

für alle $t \in [0\,,\,1]$

$h(0\,,s) = h(1\,,s) = 11$

für alle $s \in [0\,,\,1]$

$h(t, 1) = 11$

für alle $t \in [0\,,\,1]$

Die Abbildung h zieht also den Weg $t \rightarrow S\,3\,((2\,t) \cdot 360\,\circ) = w\,2(t)$ zusammen. Es bleibt, eine stetige Abbildung $F : [0\,,\,1] \times [0\,,\,1] \rightarrow : [0\,,\,1] \times [0\,,\,1]$ mit den Eigenschaften (6.10) anzugeben. Man prüft leicht nach, daß

$F : [0\,,\,1] \times [0\,,\,1] - \rightarrow [0\,,\,1] \times [0\,,\,1]$

$(t\,,\,s)$

$- \rightarrow$

$((2 - 2\,s)\,t, s)$

falls $0 \leq t \leq 12$

$(1 - s, s + (1 - s)(2\,t - 1))$ falls $1 \leq t \leq 1$

2

alle diese Bedingungen erfüllt (siehe Bild 6.20).

Ein anderes Experiment, das Satz 6.7 beweist“, ist in [Berger] 8.10.4 beschrieben.

”

6.6

Die Fundamentalgruppe

Wir skizzieren einen mathematisch präzisen Beweis von Satz 6.7. Dazu führen wir

einen neuen Begriff ein, nämlich die Fundamentalgruppe. Sie ist ein Maß dafür, wie-

viele wesentlich verschiedene nicht zusammenziehbare Wege es in einem Raum gibt.

.

.

.

Bild 6.20

Sei wieder X eine Teilmenge von R n (oder allgemeiner ein metrischer oder topolo-

gischer Raum) und x_0 ein Punkt in X . Zunächst führen wir eine Äquivalenzrelation

auf der Menge aller geschlossenen Wege mit Anfangs- und Endpunkt x_0 ein.

Definition 120 *Zwei Wege* w_1, w_2 *mit Anfangs- und Endpunkt* x_0 *heißen* homotop ,

wenn es eine stetige Abbildung

$h : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow X$

gibt, so daß

$h(t, 0)$

$=$

$w_1(t)$

und

$h(t, 1) = w_2(t)$

für alle $t \in [0, 1]$

$h(0, s)$

$=$

$h(1, s) = x_0$

für alle $s \in [0, 1]$

Wir schreiben: $w_1 \sim w_2$. *Die Abbildung heißt eine* Homotopie *zwischen* w_1 *und* w_2 .

Wir bezeichnen den *konstanten Weg* mit e, d.h.

$e(t) = x_0$

für alle $t \in [0, 1]$

Nach Definition ist ein Weg also genau dann zusammenziehbar, wenn er zum kon-

stanten Weg homotop ist.

..

Ubung: Zeigen Sie, daß $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller geschlossenen

Wege mit Anfangs- und Endpunkt x_0 ist!

Desweiteren definieren wir eine Verknüpfung auf der Menge aller geschlossenen

Wege mit Anfangs- und Endpunkt x_0: Sind

$w_1, w_2 : [0, 1] \longrightarrow X$

solche Wege, so ist der Weg $w_1 \circ w_2$ definiert durch

$w_1 \circ w_2 : [0, 1] \longrightarrow X$

t

$\longrightarrow$

$w_2(2t)$

für $0 \leq t \leq 12$

$w_1(2t - 1)$ für $1 \leq t \leq 1$

2

$w_1 \circ w_2$ ist also der Weg, der durch Anhängen des Weges w_1 an den Weg w_2

entsteht.

Es ist nicht schwer, die folgenden Tatsachen zu beweisen:

.

6.6 Die Fundamentalgruppe

331

Lemma 121

(i) $(w_1 \circ w_2) \circ w_3 \sim w_1 \circ (w_2 \circ w_3)$

für alle geschlossenen Wege

w_1, w_2, w_3 *mit Anfangs- und Endpunkt* x_0 .

(ii) $e \circ w \sim w \circ e \sim w$

für alle geschlossenen Wege w mit Anfangs- und Endpunkt

x_0 .

(iii) Ist w ein geschlossener Weg mit Anfangs- und Endpunkt x_0 *, so bezeichne* w^{-1}

den in umgekehrter Richtung durchlaufenen Weg

$w^{-1}(t) := w(1-t)$

Dann ist

$w \circ w^{-1} \sim w^{-1} \circ w \sim e$

(iv) Sind w_1, w, w

geschlossene Wege mit Anfangs- und Endpunkt x

1

2 , w 2

0 , *und ist*

w 1 ∼ w

und

w

1

2 ∼ w 2

so ist auch

w 1 ◦ w 2 ∼ w ◦ w

1

2

Für Beweise verweisen wir auf [Greenberg–Harper], [Ossa], [Schubert]. Nun sei π 1 (X,x 0)

die Menge aller Äquivalenzklassen (oder, wie man auch sagt, *Homotopieklassen*) von

geschlossenen Wegen mit Anfangs- und Endpunkt x 0 bezüglich der Äquivalenzrela-

tion ∼. Für einen geschlossenen Weg w mit Anfangs- und Endpunkt x 0 bezeichne

[w] die Homotopieklasse von w.

Proposition 122 *Die Abbildung*

π 1(X,x 0) × π 1(X,x 0) −→ π 1(X,x 0)

$([w 1] , [w 2]) \longmapsto [w 1 \circ w 2]$

ist wohldefiniert und definiert eine Gruppenstruktur auf der Menge $\pi 1 (X,x 0)$ *aller*

Homotopieklassen geschlossener Wege mit Anfangs- und Endpunkt $x 0$. *Die Gruppe*

$\pi 1 (X,x 0)$ *mit dieser Verknüpfung heißt die* Fundamentalgruppe *von X bezüglich des*

Basispunktes $x 0$.

Der Beweis von Proposition 122 ergibt sich direkt aus Lemma 121. Das neutra-

le Element von $\pi 1 (X,x 0)$ ist die Homotopieklasse des konstanten Weges, und das

Inverse von $[w]$ ist die Homotopieklasse $[w^{-1}]$ des umgekehrt durchlaufenen Weges

w^{-1}.

123

Beispiele von Fundamentalgruppen

(i) Die ¨

Ubung in Abschnitt 6.4. zeigt, daß $\pi 1 (\mathbb{R} n, \mathbf{0})$ *nur aus dem neutralen Ele-*

ment besteht. Ist allgemeiner X eine zusammenh¨

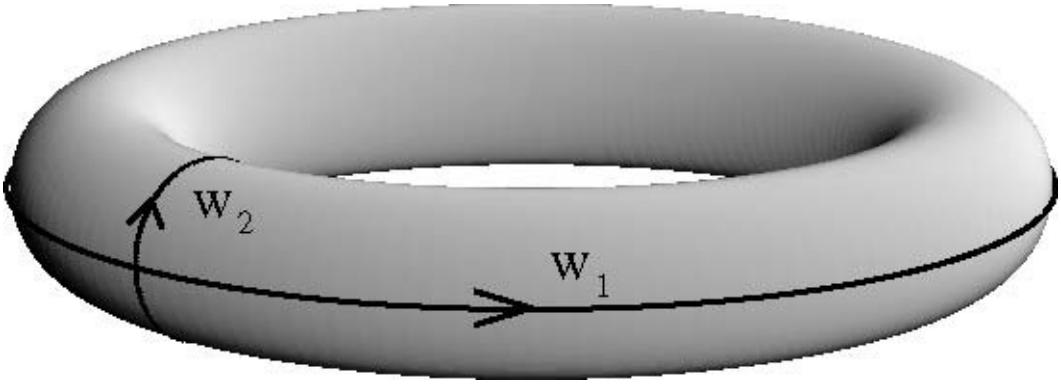
angende Menge, so daß f¨

ur

einen Basispunkt $x 0$ *die Fundamentalgruppe* $\pi 1 (X,x 0)$ *nur aus dem neutralen*

Element besteht, so sagt man, X sei einfach zusammenhängend *oder* $\pi 1 (X,x 0)$

sei trivial .



(ii) Die Fundamentalgruppe von S 1 = {(*x* 1 ,*x* 2) ∈ R2 | *x* 2 + *x* 2 = 1 } *bez* 1

2

..

uglich

irgendeines Basispunktes ist isomorph zu Z . *Die Techniken, die wir jetzt ent-*

wickeln, erlauben es, diese Tatsache exakt zu beweisen.

(iii) Man kann zeigen, daß die Fundamentalgruppe eines zweidimensionalen Torus

isomorph zu Z × Z *ist. Sind w* 1 ,*w* 2 *die in der Abbildung 6.21 skizzierten Wege,*

so ist jeder geschlossene Weg auf dem Torus homotop zu einem Weg der Form

wm ◦ *wn mit m,n* ∈ Z .

1

2

Bild 6.21

..

Ubung: Seien x 0 und x zwei Basispunkte in X . Gibt es eine stetige Abbildung

0

γ : [0 , 1] − → X so daß γ (0) = x 0 ,γ (1) = x , so sind die Gruppen π

0

1 (X,x 0)

und π 1(X,x) isomorph! Hinweis: Ist w ein geschlossener Weg mit Anfangs- und

0

Endpunkt x , so ist

0

⎧

⎨ γ(3 t)

für 0 ≤ t ≤ 1 / 3

t → ⎩ w (3 t − 1) für 1 / 3 ≤ t ≤ 2 / 3

γ(3 − 3 t)

für 2 / 3 ≤ t ≤ 1

ein geschlossener Weg mit Anfangs- und Endpunkt x 0 .

Mit Sn bezeichnen wir die Sphäre

Sn :=

(x 1 , · · · ,xn,xn+1) ∈ R n+1 x 2 + · · · + x 2 + x 2

= 1

1

n

n+1

Proposition 124 *Ist* $n \geq 2$ *, so besteht für jeden Punkt* $\mathbf{q} \in$ *Sn die Fundamental-*

gruppe π 1(*Sn,* **q**) *nur aus dem neutralen Element, das heißt, jeder geschlossene Weg*

mit Anfangs- und Endpunkt **q** *ist zusammenziehbar.*

Um den Beweis von Proposition 124 vorzubereiten, zeigen wir

Lemma 125 *Seien w und w geschlossene Wege in Sn mit Anfangs- und Endpunkt*

q *, so daß f*

ur kein $t \in [0 , 1]$ *die Punkte* $w(t)$ *und* $w(t)$ *Antipoden sind, d.h.*

$w(t) = -w(t)$,

Dann sind w und w homotop.

.
.
.
.
.
.
.
.

6.6 Die Fundamentalgruppe

333

Beweis von Lemma 125 Für $\mathbf{x} \in$ R *n*+1 sei

x

:=

x 2 + · · · + x 2

1

n+1

Setze

$s \cdot w$ (t) + (1 − s) · w(t)

h(t,s) :=

$s \cdot w$ (t) + (1 − s) · w(t)

Da w (t) = −w (t) und w (t) ,w (t) auf der Sphäre Sn liegen, ist stets s w (t) + (1 −

s) w (t) = 0 für $s \in$ [0 , 1] . Somit ist h : [0 , 1] × [0 , 1] −→ Sn wohldefiniert. Man prüft leicht nach, daß h eine Homotopie zwischen w und w ist.

✷

Beweis von Proposition 124 Lemma 125 impliziert, daß jeder Weg, der den

zu **q** antipodalen Punkt −**q** vermeidet, zum konstanten Weg e(t) = **q** homotop

ist. Um zu zeigen, daß ein allgemeiner Weg w zum konstanten Weg homotop ist,

werden wir ihn durch einen homotopen Weg ersetzen, der −**q** vermeidet. Sei also

w : [0 , 1] −→ Sn ein geschlossener Weg mit Anfangs- und Endpunkt **q**. Da w als

stetige Abbildung auf dem kompakten Intervall [0 , 1] gleichmäßig stetig ist, gibt es

0 = t 0 < t 1 < t 2 < · · · < tr− 1 < tr = 1 , so daß

$w(s) - w(t) < 1$

für $s,t \in [t$

2

$j-1, tj+1], j = 1, \cdots, r-1$

(6.11)

Wir konstruieren nun einen Weg w, der stückweise auf Großkreisen verläuft, nämlich

$1 - t-tj$

$\cdot w(t$

$\cdot w(t$

t

$j) +$

$t-tj$

j

$j+1 - tj$

$tj+1 - tj$

$+1)$

$w(t) :=$

für $t \in [tj, tj+1]$

$1 - t-tj$

$\cdot w(t$

$\cdot\, w(\, t$

t

$j\,) +$

$t - tj$

j

(6.12)

$j{+}1\ - tj$

$tj{+}1\ - tj$

$+1)$

w verbindet stückweise die Punkte $w\,(\,tj)$ und $w\,(\,tj{+}1)$ auf Großkreisen. Man beachte, daß wegen (6.11) der Nenner in (6.12) stets von Null verschieden ist. Ist nun

w(t)

j+1

w(t)

S2

j

w

w(t)

j-1

q = w(t) = w(t)

0

r

Bild 6.22

$t \in [\, tj, tj+1]$ so ist nach (6.11)

.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.

$w(\, t) - w(\, tj) < 1$,

$w(\, t) - w(\, t$

und

$w(\, t$

2

$j+1)$

< 12

$j\,) - w(\, tj+1)$

< 12

Also ist

$w(t) - w(t) < 1$

Also ist nach Lemma 125 der Weg w homotop zum Weg w . Als nächstes konstruieren

wir einen zu w homotopen Weg w , der den zu $\mathbf{q}$ antipodalen Punkt $-\mathbf{q}$ vermeidet.

Dazu wählen wir sukzessive Punkte $\mathbf{q}_j$; $j = 1, \ldots, r-1$, nahe bei $w(t_j)$, so daß $\mathbf{q}_{j+1}$

nie in der von $\mathbf{0}$, $\mathbf{q}_j$ und $-\mathbf{q}$ aufgespannten Ebene liegt. Setze

$w(t) :=$

$1 - t - t_j$

$\cdot \mathbf{q}$

$\cdot \mathbf{q}$

t

j

$+$

$t - t_j$

j

$j+1 - t_j$

$t_{j+1} - t_j$

$+1$

für $t \in [t_j, t_{j+1}]$

wobei $\mathbf{q}0 = \mathbf{q}\, r = \mathbf{q}$. Wenn $\mathbf{q}\, j$ genügend nahe bei $w\,(\,tj)$ gewählt war, ist wieder nach Lemma 125 w homotop zu w . Nach Konstruktion ist $w\,(\,t) = -\mathbf{q}$ für alle

$t \in [\,-1\,,1]$. Da w den Punkt $-\mathbf{q}$ vermeidet, sind die Voraussetzungen von Lemma 125 für w und den konstanten Weg $e\,(\,t) = \mathbf{q}$ für $t \in [0\,,1]$ erfüllt. Also ist w zum konstanten Weg homotop. Da Homotopie eine Äquivalenzrelation ist, ist auch w zum

konstanten Weg homotop.

✷

Als nächstes zeigen wir, daß $SU\,(2)$ homöomorph ist zur 3-Sphäre $S\,3$. Mit Pro-

position 124 folgt dann, daß die Fundamentalgruppe von $SU\,(2)$ trivial ist. Um den

Homöomorphismus zwischen $SU\,(2)$ und $S\,3$ elegant beschreiben zu können, fassen

wir $S\,3$ als Teilmenge von C2 auf.

$S\,3$

$=$

$\{(\,x\,1 + ix\,2\,,\,x\,3 + ix\,4)\,/\,x\,1\,,x\,2\,,x\,3\,,\,x\,4 \in \mathrm{R}\,,\,x\,2 + x\,2 + x\,2 + x\,2 = 1\,\}$

1

2

3

4

$=$

$\{(\,z\,1\,,z\,2) \in \mathrm{C}2\,/\,|\,z\,1\,|\,2 + |\,z\,2\,|\,2 = 1\,\}$

Lemma 126 *Die Abbildung*

$T : SU(2)$

$\longrightarrow S^3$

a

b

1

a

$-$

$\longrightarrow$

a

b

$=$

b

a

$-b\ a$

0

$-b$

ist ein Hom¨

oomorphismus. Insbesondere ist $\pi_1(SU(2), 11)$ *trivial.*

Beweis T ist offenbar eine stetige Abbildung, die die stetige Umkehrabbildung

$(z_1, z_2) \to$

$z_1 - z_2$

hat.

✷

z 2

z 1

Wir verwenden nun die in den Abschnitten 6.2 und 6.3 betrachtete Abbildung

$\rho : SU(2) \longrightarrow SO(3)$, um die Fundamentalgruppe von $SO(3)$ zu bestimmen. Diese

Abbildung ist ein Spezialfall einer unverzweigten Überlagerung.

Definition 127 *Seien X,Y Teilmengen von* R *n (oder allgemeiner, metrische oder*

topologische R¨

aume). Eine stetige Abbildung

.

$f : X \longrightarrow Y$

heißt unverzweigte Überlagerung *, falls jeder Punkt* $y \in Y$ *eine offene Umgebung* U

hat, so daß $f^{-1}(U)$ *eine disjunkte Vereinigung offener Mengen in X ist, von denen*

jede unter f hom¨

oomorph auf U abgebildet wird.

Beispiele f¨

ur unverzweigte ¨

Uberlagerungen

(i) Die Abbildung R $-\rightarrow$ S 1 =

$z \in$ C

$|z| = 1$, $x \rightarrow e$ 2 πix ist eine unver-

zweigte Überlagerung. Der Beweis sei den LeserInnen als Übung überlassen.

(ii) Die Abbbildung $\rho : SU$ (2) $-\rightarrow$ SO (3) ist eine unverzweigte Überlagerung.

Beweis Nach Lemma 126 ist SU (2) homöomorph zu S 3, also kompakt. Al-

so ist jede abgeschlossene Teilmenge von SU (2) kompakt. Somit ist für jede

abgeschlossene Teilmenge A von SU (2) das Bild ρ (A) in SO(3) abgeschlos-

sen, denn das Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Abbildung

ist stets kompakt, also abgeschlossen. Ist nun O eine offene Teilmenge von

SU (2), so setze $O := O \cup \{-A/A \in O\}$. O ist ebenfalls offen, und nach Satz

6.3 ist $\rho(O) = \rho(O)$ das Komplement des Bildes der abgeschlossenen Menge

$A := SU(2) \setminus O$. Nach dem, was wir eben gesagt haben, ist auch $\rho(A)$ abge-

schlossen. Somit ist $\rho(O) = SO(3) \setminus \rho (A)$ offen. Dies zeigt, daß das Bild jeder

offenen Teilmenge unter ρ offen ist. Sei nun $X \in SO(3)$. Nach Satz 6.5 gibt es

$A \in SU$ (2), so daß $\rho- 1 (X) = \{A, - A\}$. Wähle eine offene Umgebung $U+$ von

A in SU (2), so daß $U+$ die offene Menge $U- := \{-A /A \in U+ \}$ nicht trifft!

Setze $U := \rho (U+) = \rho (U-)$. Dann ist nach Satz 6.5

$\rho- 1 (U) = U+ \cup U-$

und die Einschränkungen ρ

bzw . ρ

sind bijektive stetige Abbildungen

$U+$

$U-$

zwischen $U+$ und U bzw. $U-$ und U . Wir haben oben gesehen, daß das Bild

jeder offenen Menge in $U+$ unter ρ

offen in U ist. Anders gesagt, das Ur-

$U+$

bild jeder offenen Menge in $U+$ unter (ρ

) − 1 ist offen in U . Dies zeigt, daß

$U+$

(ρ

) − 1 stetig ist. Also ist ρ

: U

U

+ − → U ein Homöomorphismus. Ebenso

+

$U+$

zeigt man, daß ρ

: U

U

$- - \to U$ ein Homöomorphismus ist.

✷

–

Ist allgemein $f : X - \to Y$ eine stetige Abbildung, $x\,0 \in X$, $y\,0 = f\,(\,x\,0)$, und ist $w : [0\,,\,1] - \to X$ ein geschlossener Weg mit Anfangs- und Endpunkt $x\,0$, so ist

$f \circ w : [0\,,\,1] - \to Y$ ein geschlossener Weg mit Anfangs- und Endpunkt $y\,0$. Ist ferner

$h : [0\,,\,1] \times [0\,,\,1] - \to X$ eine Homotopie zwischen zwei geschlossenen Wegen w und w in X mit Anfangs- und Endpunkt $x\,0$, so ist $f \circ h$ eine Homotopie zwischen den

Wegen $f \circ w$ und $f \circ w$. Diese Überlegung zeigt, daß $[\,w] - \to [\,f \circ w]$ eine Abbildung

$f* : \pi\,1\,(\,X,x\,0) - \to \pi\,1\,(\,Y,y\,0)$

induziert. Man prüft leicht nach, daß $f*$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

Für allgemeine Abbildungen f ist es nicht möglich, in sinnvoller Weise jedem

geschlossenen Weg w in Y mit Anfangs- und Endpunkt $y\,0$ einen Weg in X zuzu-

ordnen. Falls f jedoch eine unverzweigte Überlagerung ist, kann man folgendermaßen

vorgehen: Da $[0\,,\,1]$ kompakt ist, kann man Zahlen $t\,1\,,t\,2\,,\cdots,tr- 1$ mit

$0 = t\,0 < t\,1 < t\,2 < \cdots < tr- 1 < tr = 1$

und offene (resp. halboffene für $j = 0\,,r$) Intervalle Ij um tj so finden, daß

(i)

$Ij \cap Ij+1 = \varnothing$

(ii) jeder Punkt w (tj) eine Umgebung Uj in Y hat, so daß w (Ij) $\subset$ Uj und f − 1 (Uj) in Zusammenhangskomponenten U (i) zerf

j

ällt, von denen jede durch f

homöomorph auf Uj abgebildet wird.

U2

w’(t)

2

w’

y = w’(t)

0

0

U

U

0

1

w’(t)

1

Bild 6.23

Da $f - 1$ (U 0) den Punkt x 0 enthält, gibt es eine Komponente U (i 0) von $f - 1$ (U

0

0),

die x 0 enthält. Sei w 0 die Abbildung

w 0 : I 0 $- \rightarrow$ U (i 0) $\subset X$

0

$- 1$

t

$- \rightarrow$

f | (i

(w (t))

U 0)

0

Dann ist $f \circ w$ 0 = w |

und w

I 0

0 (0) = x 0. Wähle nun einen Hilfspunkt s 0 $\in$ I 0 $\cap$ I 1.

Dann ist w (s 0) $\in$ U 0 $\cap$ U 1, also gibt es genau ein i 1, so daß U (i 1) den Punkt w 1

0 (s 0)

enthält. Setze

$w\,1 : I\,1 \longrightarrow U(i\,1) \subset X$

1

$-\,1$

t

$\longrightarrow$

$f\,|\,(i$

$(w(t))$

$U\,1)$

1

Man kann nachprüfen, daß

$w\,0\,|I$

$= w$

und $f \circ w$

$0\,\cap I\,1$

$1\,|I\,0\,\cap I\,1$

$1 = w\,|I\,1$

.

6.6 Die Fundamentalgruppe

Auf dieselbe Weise lassen sich stetige Abbildungen

$wj : Ij \longrightarrow X$

konstruieren, so daß

$f \circ wj = w\ |I$

und

w

$= w$

f

j

$j\ |Ij\ \cap Ik$

$k\ |Ij\ \cap Ik$

ür $j,k = 1\ ,\ \cdots\ ,r$

Diese Abbildungen lassen sich zu einer stetigen Abbildung $w : [0\ ,\ 1] - \rightarrow\ X$ zusam-

mensetzen, so daß $w| = w$

Ij

j . Offenbar ist

$f \circ w = w$

und

$w(0) = x\ 0$

Allerdings ist im Allgemeinen $w\ (1) = x\ 0$, das heißt, im Allgemeinen ist w kein

geschlossener Weg mehr.

x0

w

w(1)

f

y0

w’

Bild 6.24

Allgemein sagt man

Definition 128 *Sei* $f : X \longrightarrow Y$ *eine unverzweigte* ¨

Uberlagerung, und $g : Z \longrightarrow Y$

eine stetige Abbildung. Eine stetige Abbildung $g : Z \longrightarrow X$ *heißt eine* Liftung *von*

g *unter* f *, falls* $f \circ g = g$.

Oben haben wir einen Beweis dafür angedeutet, daß es zu jedem geschlossenen Weg

mit Anfangs- und Endpunkt $y\,0$ eine Liftung gibt. Genauer gilt

.

Proposition 129 *Sei* $f : X \longrightarrow Y$ *eine unverzweigte* ¨

Uberlagerung, $x\,0 \in X$ *und*

$y\,0 := f(x\,0) \in Y$.

(i) Ist $w : [0\,,\,1] \longrightarrow Y$ *eine stetige Abbildung mit* $w\,(0) = y\,0$ *, so gibt es eine*

eindeutig bestimmte Liftung $w : [0 , 1] \longrightarrow X$ *von* w *mit* $w(0) = x_0$

(ii) Ist $h : [0 , 1] \times [0 , 1] \longrightarrow Y$ *eine Homotopie zwischen zwei geschlossenen Wegen*

w_1, w_2 *in* Y *mit Anfangs- und Endpunkt* y_0 *, so gibt es eine eindeutig bestimmte*

Liftung $h : [0 , 1] \times [0 , 1] \longrightarrow X$ *von* h *mit* $h(0 , 0) = x_0$ *. Für diese Liftung* h *gilt* $h(0 ,s) = h(0 , 0) = x_0$ *und* $h(1 ,s) = h(1 , 0)$ *für alle* $s \in [0 , 1]$

Der Beweis von (ii), auf den wir hier verzichten, verläuft ähnlich wie die oben angedeutete Konstruktion der Liftung eines Wegs. Für Einzelheiten siehe zum Beispiel [Greenberg–Harper], ch.5.

Ist $w : [0 , 1] \longrightarrow Y$ ein geschlossener Weg mit Anfangs- und Endpunkt y_0 und

$w : [0 , 1] \longrightarrow X$ die Liftung von w mit $w(0) = x_0$, so braucht, wie oben gesagt, der Endpunkt $w(1)$ des Weges w nicht gleich x_0 zu sein. Man kann dies dazu verwenden,

um zu beweisen, daß ein Weg in Y nicht zusammenziehbar ist.

Lemma 130 *Sei $f : X \longrightarrow Y$ eine unverzweigte ¨*

Uberlagerung, $x_0 \in X$ und $y_0 =$

$f(x_0)$. Ferner sei $w : [0 , 1] \longrightarrow Y$ ein geschlossener Weg mit Anfangs- und Endpunkt

y_0 und $w : [0 , 1] \longrightarrow X$ die Liftung von w mit $w(0) = x_0$. Falls $w(1) = x_0$ so ist w nicht zusammenziehbar.

Beweis Wir nehmen an, w sei zusammenziehbar. Dann gäbe es eine Homotopie

$h : [0 , 1] \times [0 , 1] \longrightarrow Y$ zwischen w und dem konstanten Weg y_0 in Y. Nach Teil (ii) von Proposition 129 hätte sie eine Liftung $h : [0 , 1] \times [0 , 1] \longrightarrow X$ mit

$h(0 ,s)$

$=$

x_0

$h(1 ,s)$

$=$

$h(1 , 0)$

für alle $s \in [0 , 1]$

$h(t, 0)$

$=$

$w(t)$

für alle $t \in [0 , 1]$

(6.13)

Die Abbildung $[0 , 1] \longrightarrow X, t \to h (t, 1)$ wäre dann eine Liftung des konstanten Weges

y 0 mit Anfangspunkt $h (0 , 1) = x$ 0. Also wäre nach der ersten Aussage von Proposi-

tion 129

$h (t, 1) = x$ 0

für alle $t \in [0 , 1]$

Insbesondere wäre $h (1 , 1) = x$ 0 . Nach (6.13) wäre dann

x 0 $= h(1 , 1) = h(0 , 1) = w(1)$

im Widerspruch zur Voraussetzung des Lemmas.

✷

Bevor wir diese Überlegung anwenden, benötigen wir noch

.

.

.

.

.

6.6 Die Fundamentalgruppe

339

Definition 131 *Sei X eine Teilmenge von* R *n (oder allgemeiner, ein metrischer*

oder topologischer Raum). X heißt wegzusammenhängend *, falls es f*¨

ur je zwei

Punkte $x,x \in X$ *eine stetige Abbildung* $w : [0 , 1] \longrightarrow X$ *gibt, so daß* $w(0) = x$ *und*

$w(1) = x$.

Satz 6.8 *Sei* $f : X \longrightarrow Y$ *eine unverzweigte* ¨

Uberlagerung, $x_0 \in X$ *und* $y_0 = f(x_0)$.

Wir nehmen an, daß X einfach zusammenh¨

angend und wegzusammenh¨

angend ist.

W¨

ahle f¨

ur jedes $x \in f^{-1}(y_0)$ *einen Weg* $w_x : [0 , 1] \longrightarrow X$ *mit* $w_x(0) = x_0$, $w_x(1) =$

x. *Setze* $w := f \circ w$

ist dann ein geschlossener Weg in Y mit Anfangs-

x

x . *Jedes* w_x

und Endpunkt y_0 . *Es gilt: Die Abbildung*

$f^{-1}(y_0) \longrightarrow \pi_1(Y,y_0)$

x

$\longrightarrow [w]$

x

ist eine Bijektion.

Beweis Seien zunächst x_1, x_2 Punkte von $f^{-1}(y_0)$, so daß $[w] = [w]$. Der Weg x_1

x_2

$\gamma : [0, 1]$

$\longrightarrow X$

$(1 - 2t)$ für $0 \leq t \leq 1$

t

$\longrightarrow$

wx_1

2

$wx(2t - 1)$ f

$\leq t \leq 1$

2

ür 12

ist eine Liftung des zusammenziehbaren Weges w

$\circ(w) - 1$. Nach Lemma 130

x_2

x_1

ist somit $x_1 = x_2$. Dies zeigt, daß die oben beschriebene Abbildung $f^{-1}(y_0)$ $\longrightarrow$

$\pi_1(Y, y_0)$ injektiv ist. Sei nun $w : [0, 1] \longrightarrow Y$ ein geschlossener Weg mit Anfangs-

und Endpunkt y 0 . Mit w : [0 , 1] − → X bezeichnen wir die Liftung von w mit

w (0) = x 0 . Der Endpunkt x : = w (1) liegt dann in f − 1 (y 0) . Wir wollen zeigen, daß w und w homotop sind. Dazu bemerken wir, daß die Abbildung

x

w− 1 ◦ wx : [0 , 1] − → X

t

− →

wx(2 t)

für 0 ≤ t ≤ 12

w(2 − 2 t) für 1 ≤ t ≤ 1

2

ein geschlossener Weg in X mit Anfangs- und Endpunkt x 0 ist. Da X einfach

zusammenhängend ist, ist dieser Weg homotop zum konstanten Weg x 0 . Deshalb ist

auch der Weg

t − → f ((w− 1 ◦ wx)(t)) = ((w) − 1 ◦ w)(t)

x

zusammenziehbar, das heißt (w) − 1 ◦ w ist homotop zum konstanten Weg. Somit

x

sind w und w homotop. Damit ist auch die Surjektivit

x

ät der Abbildung aus Satz

6.8 bewiesen.

✷

Bemerkung 132 Wenn man in Satz 6.8 die Voraussetzung, daß X einfach zusam-

menhängend ist, wegläßt, kann man immer noch Aussagen über das Verhältnis von

$\pi 1 (Y,y 0)$ und $\pi 1 (X,x 0)$ machen, siehe z.B. [Greenberg–Harper], [Ossa], [Schubert].

.

Als Folgerung aus Satz 6.8 ergibt sich nun die folgende Verfeinerung von Satz 6.7:

Satz 6.9 *$SO(3)$ ist kompakt, wegzusammenh¨*

angend, und $\pi 1 (SO(3) , 11)$ besteht aus

zwei Elementen, n¨

amlich der Homotopieklasse des konstanten Weges und der Ho-

motopieklasse des Weges $t \to S 3 (t \cdot 360 \circ)$.

Beweis Nach Lemma 126 ist $SU(2)$ homöomorph zu $S 3$, also insbesondere kompakt

und wegzusammenhängend. Deshalb ist $SO(3)$ als Bild von $SU(2)$ unter der stetigen

Abbildung ρ ebenfalls kompakt und wegzusammenhängend.

Wir wenden nun Satz 6.8 auf die Überlagerung $\rho : SU(2) - \to SO(3)$ an. $\rho - 1$

(11)

besteht aus zwei Elementen, nämlich ± 11 . Als Weg w 11, der 11 mit 11 verbindet,

wählen wir den konstanten Weg, und als Weg $w-$ 11 , der 11 mit − 11 verbindet, den

Weg

$e\pi it$

0

$w-$ 11(t) =

0

$e-\pi it$

Dann ist w 11 = $\rho \circ w$ 11 der konstante Weg, und $w-$ 11 = $\rho \circ w-$ 11 ist nach Bemerkung

111.i der Weg $t \to S$ 3 ($t \cdot 360 \circ$) . Nach Lemma 126 und Proposition 124 ist SU (2)

einfach zusammenhängend, also folgt aus Satz 6.8, daß π 1 (SO(3) , 11) aus den Homo-

topieklassen der beiden genannten Wege besteht.

✷

..

Ubung: Bestimmen Sie die Fundamentalgruppe von S 1 !

..

Ubung: Zeigen Sie, daß wegzusammenhängende Räume stets zusammenhängend

sind!

..

Ubung: An welcher Stelle wurde im Beweis von Proposition 124 die Voraussetzung

$n \geq 2$ verwendet?

6.7

Die Hopfabbildung

Mit Hilfe des Homomorphismus $\rho : SU(2) \longrightarrow SO(3)$ kann man eine in vielerlei

Hinsicht interessante stetige Abbildung von der 3 − Sphäre S 3 auf die 2 − Sphäre S 2

konstruieren. Wie in Lemma 126 fassen wir S 3 als Teilmenge von C2 auf:

S 3

=

$\{(x 1 + ix 2 , x 3 + ix 4) / x 1 ,x 2 ,x 3 , x 4 \in$ R , $x 2 + x 2 , + x 2 + x 2 = 1 \}$ =

1

2

3

4

=

$\{(z 1 ,z 2) \in$ C2 / $| z 1 | 2 + | z 2 | 2 = 1 \}$

Satz 6.10 *Es gibt eine eindeutig bestimmte Abbildung*

$h : S 3 \longrightarrow S 2$

so daß

.

6.7 Die Hopfabbildung

341

a)

f¨

ur alle $A \in SU(2)$ *und alle* $\mathbf{z} = (z_1, z_2) \in S^3$ *gilt*

$h(A\mathbf{z}) = \rho(A)\, h(\mathbf{z})$

b)

$h(1, 0) = (0, 0, 1)$

Beweis Zunächst zeigen wir, daß eine Abbildung $h : S^3 \longrightarrow S^2$ durch die Eigen-

schaften (a) und (b) eindeutig bestimmt ist. Ist nämlich $\mathbf{z} = (z_1, z_2) \in S^3$, so gibt

es nach Lemma 126 eine eindeutig bestimmte Matrix $A = T^{-1}(\mathbf{z}) \in SU(2)$ so daß

$A^{-1}\mathbf{z} = (1, 0)$

Aus (a) und (b) folgt dann, daß

$$h(\mathbf{z}) = h(A(A^{-1}\mathbf{z})) = h(A \cdot (1, 0)) = \rho(A) \cdot h((1, 0)) = \rho(A) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diese Rechnung legt auch die Definition von h nahe, nämlich

$$h(\mathbf{z}) := \rho\left(T^{-1}(\mathbf{z})\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mit dieser Definition müssen wir (a) und (b) nachprüfen. Aus der Definition von T

folgt, daß

$$T(A \cdot B) = A \cdot B = A \cdot T(B),$$

also ist für alle $\mathbf{z} \in S^3$,

$$T^{-1}(A\mathbf{z}) = A \cdot T^{-1}(\mathbf{z})$$

Folglich ist

$$\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$

0

h (A **z**)

=

ρ (T − 1 (A **z**)) ⎝ 0 ⎠

=

ρ (A · T − 1 (**z**)) ⎝ 0 ⎠

1

1

⎛

⎝

0

=

ρ (A) · ρ (T − 1**z**) ⎝ 0 ⎠ = ρ (A) · h (**z**)

1

Somit gilt (a). Da T − 1 ((1 , 0)) = 11, folgt (b) direkt.

✷

Die Abbildung h : S 3 − → S 2 aus Satz 6.10 heißt die *Hopf-Abbildung*. Sie kann auf verschiedene Weisen durch Formeln beschrieben werden.

.

.

.

.

.

.

.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.

Satz 6.11 *(Beschreibung der Hopf-Abbildung)*

i)

Ist $F : SO(3) \longrightarrow S\,2$ *die Abbildung* $R \longrightarrow R(\,e\,3)$ *, so ist*

$h = F \circ \rho \circ T - 1$,

wobei $T : SU\,(2) \longrightarrow S\,3$ *die Abbildung* $A \longrightarrow Ae\,1$ *und* $\rho : SU\,(2) \longrightarrow SO(3)$

die in Satz 6.5 und Satz 6.6 beschriebene Abbildung ist.

ii)

Sei ˜

$h : S\,3 \longrightarrow$ P1C *die Abbildung*

$z\,1$

falls z

$(\,z$

z

2 = 0

1 ,*z* 2) − →

2

∞ *falls z* 2 = 0

Dann ist die Hopf-Abbildung die Hintereinanderschaltung von ˜

h und der Um-

kehrabbildung zur stereographischen Projektion p : *S* 2 − → P1C :

h = *p*− 1 ◦ ˜ *h*

iii) F¨

ur **z** = (*z* 1 ,*z* 2) ∈ *S* 3 *ist*

h (**z**) = (**z** · (*σ* 1 **z**) , − **z** · (*σ* 2**z**) , **z** · (*σ* 3**z**)) *Dabei sind σ* 1 ,*σ* 2 ,*σ* 3 *die Pauli-Matrizen aus Abschnitt 6.4.*

Beweis (i) wurde im Beweis von Satz 6.10 zur Definition der Hopf-Abbildung ver-

wendet. Um (ii) zu beweisen, verifizieren wir, daß die Abbildung *p*− 1 ◦ ˜ *h* die Eigen-

schaften (a) und (b) aus Satz 6.10 hat. Ist **z** = (*z* 1 ,*z* 2) ∈ *S* 3 und *A* ∈ *SU* (2), so ist

nach Satz 6.5 und der Rechenregel aus Bemerkung 27

p− 1 (˜

h (*A* **z**)) = *p*− 1 (*ϕA* (˜

h (**z**)) = *ρ* (*A*) · *p*− 1 (˜ *h* (**z**))

Ferner ist

$p-1$ (˜

h (1 , 0)) = $p-1$ (∞) = (0 , 0 , 1)

Ebenso prüfen wir nach, daß die in (iii) angegebene Abbildung die Eigenschaften (a)

und (b) aus Satz 6.10 hat. Ist $\mathbf{z} \in S$ 3 und $A \in SU$ (2), so ist für j = 1 , 2 , 3

T

(A **z**) · (σjA **z**) =

z · (AT σjA **z**)

=

z · (A σjA **z**) =

=

z · ($A-1$ σjA **z**) = **z** · ($A-1$ σj A) **z**

Nach Korollar 115

(− 1) j+1 $A-1$ σj A =

3

ρ ($A-1$)

i=1

ij (− 1) i+1 σi

=

3

ρ ($A-1$)

$i=1$

$ij\ (-1)\ i+1\ \sigma i$

$=$

3

$\rho\ (AT)$

$i=1$

$ij\ (-1)\ i+1\ \sigma i$

$=$

3

$\rho(A)$

$i=1$

$ji\ (-1)\ i+1\ \sigma i$

.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.
.

6.7 Die Hopfabbildung

343

Folglich ist

3

$(-1)^{j+1} A\mathbf{z} \cdot (\sigma_j A\mathbf{z}) =$

$\rho(A) \sum_{i=1}^{j} (-1)^{i+1} \mathbf{z} \cdot \sigma_i \mathbf{z}$

und somit

$(A\mathbf{z} \cdot \sigma_1 A\mathbf{z}, -A\mathbf{z} \cdot \sigma_2 A\mathbf{z}, A\mathbf{z} \cdot \sigma_3 A\mathbf{z}) = \rho(A)(\mathbf{z} \cdot \sigma_1 \mathbf{z}, -\mathbf{z} \cdot \sigma_2 \mathbf{z}, \mathbf{z} \cdot \sigma_3 \mathbf{z})$
Die Tatsache, daß für $\mathbf{z} = (1, 0)$

$(\mathbf{z} \cdot \sigma_1 \mathbf{z}, -\mathbf{z} \cdot \sigma_2 \mathbf{z}, \mathbf{z} \cdot \sigma_3 \mathbf{z}) = (0, 0, 1)$ ist leicht nachzurechnen.

✷

Als nächstes betrachten wir die Fasern der Hopf-Abbildung.

Proposition 133

i) Sind $\mathbf{z} = (z_1, z_2)$ *und* $\mathbf{z} = (z_1, z_2) \in S^3$, *so gilt* $h(\mathbf{z}) = h(\mathbf{z}_1)$

2

genau dann, wenn es eine komplexe Zahl λ *mit* $|\lambda| = 1$ *gibt, so daß* $(z_1, z_2) =$

1

2

$(\lambda z_1, \lambda z_2)$

ii)

$h^{-1}(0, 0, 1)$

$=$

$\{(z_1, z_2) \in S^3 / z_2 = 0\}$

$h^{-1}(0, 0, -1) = \{(z_1, z_2) \in S^3 / z_1 = 0\}$

Beweis Nach Satz 6.11 (ii) stimmen die Fasern von h mit den Fasern der Abbildung

$\tilde{h}$ überein. Daraus ergibt sich die Proposition sofort.

✷

Um die Fasern der Hopf-Abbildung genauer zu betrachten, verwenden wir die vier-

„

dimensionale stereographische Projektion“

$\hat{q} : S^3 \setminus \{(0, i)\} \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(x_1 + i x_2, x_3 + i x_4) \longrightarrow$

$\frac{1}{1 - x_4}(x_1, x_2, x_3)$

(vgl. Formel (6.5)). Sie ermöglicht es, sich Teilmengen von S^3 anschaulich vorzustel-

len.

Aus Proposition 133 folgt, daß für das Urbild des Nordpols auf S^2 gilt:

$\hat{h}^{-1}$

$q\,(\,h^{-1}\,(0\,,\,0\,,\,1)) = \{(\,\xi_1\,,\xi_2\,,\,0)\,/\,\xi_2 + \xi_2 = 1\,\}$

1

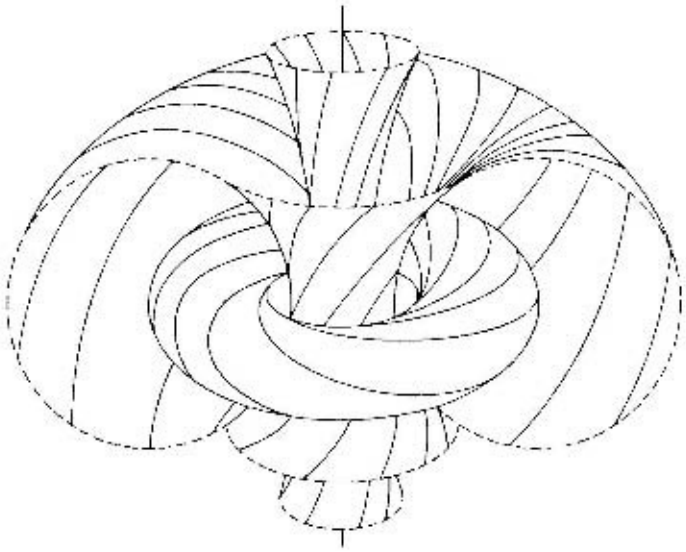
2

und für das Urbild des Südpols

$\hat{}$

$q\,(\,h^{-1}\,(0\,,\,0\,,\,-1) \setminus \{\,0\,,i\}) = \{(0\,,\,0\,,\xi_3)\,/\,\xi_3 \in \mathrm{R}\,\}$

▪



ξ3

ξ2

ξ1

Bild 6.25

Bild 6.26

Man sieht, daß ˜

$h^{-1}(0)$ und ˜

$h^{-1}(\infty)$ verschlungen“ sind. Das heißt, für jede ste-

”

tige Abbildung g von der Einheitskreisscheibe $D := \{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \}$

1

2

nach S^3, die den Rand S^1 von D homöomorph auf ˜

$h^{-1}(0)$ abbildet, trifft das Bild

$g(D)$ die Menge ˜

$h^{-1}(\infty)$. Es ist interessant, die Bilder aller anderen Fasern von

h unter der stereographischen Projektion q zu zeichnen. Man erhält die Figur in

Bild 6.26. Wie in Abschnitt 6.4 sagt man, daß eine stetige Abbildung $f : X \to Y$

zwischen zwei Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ (bzw. metrischen bzw. topologischen Räumen)

zusammenziehbar ist, wenn es eine stetige Abbildung $H : X \times [0, 1] \to Y$ gibt, so

daß $H(x, 0) = f(x)$ für alle $x \in X$ und $H|X \times \{1\}$ eine konstante Abbildung ist. Man kann zeigen, daß die Hopf-Abbildung $h : S^3 \to S^2$ nicht zusammenziehbar ist. Eine

wichtige Ingredienz im Beweis dafür ist die Beobachtung, daß je zwei verschiedene

Fasern von h verschlungen sind (vgl. [Hu], III 5.1). Allgemeiner kann man die

Menge

der Homotopieklassen stetiger Abbildungen von der $k-$ Sphäre Sk in einen Raum X,

die (1 , 0 . . . , 0) auf einen festen Punkt $x\ 0 \in X$ abbilden, in ähnlicher Weise wie in

Abschnitt 6.6 zu einer Gruppe machen. Diese Gruppe heißt die $k - te$ Homotopie-

gruppe πk (X , x 0). Die erste Homotopiegruppe ist gerade die Fundamentalgruppe.

Nun kann man beweisen, daß für jedes $x\ 0 \in S\ 2$

.
.
.
.
.
.
.
.

6.8 Ergänzungen zu Kapitel 6

345

π 3 (S 2 , x 0) isomorph zu Z

ist, und daß bei einem Isomorphismus von π 3 (S 2 , x 0) mit Z die Homotopieklasse

der Hopfabbildung h auf ± 1 abgebildet wird.

6.8

Erg¨

anzungen zu Kapitel 6

6.8.1

Die Bewegung eines Kreisels

Es ist ein klassisches Problem der Mechanik, die Bewegung eines starren Körpers

zu beschreiben, der an einem Punkt O befestigt, aber sonst frei beweglich ist. Einen

solchen Körper nennt man in der Mechanik einen Kreisel. Die Position eines Krei-

sels kann man nun beschreiben, indem man eine Ruhelage des Kreisels auszeichnet

und bemerkt, daß es für jede andere Lage des Kreisels genau eine Drehung R um

den Aufhängepunkt O gibt, die den Kreisel in Ruhelage auf den Kreisel in der zu

betrachtenden Lage abbildet (vgl. Abschnitt 6.2).

Als Ortsvariable für die Beschreibung der Bewegung eines Kreisels kann man also

die Elemente von $SO(3)$ verwenden. Die Bewegungsgleichungen für einen Kreisel

sind dann Differentialgleichungen auf $SO(3)$. Das führt zu einem System von Diffe-

rentialgleichungen für die von der Zeit t abhängenden Eulerschen Winkel $\vartheta(t)$, $\phi(t)$,

$\psi(t)$. Es gibt einige spezielle Situationen, in denen diese Differentialgleichungen ex-

plizit lösbar sind. Zu ihnen gehören der kräftefreie Kreisel (siehe [Sommerfeld] §§ 25,

26) und der Fall, daß sich der Kreisel unter Einfluß der Schwerkraft (in negativer

x 3-Richtung) bewegt und in der Ruhelage symmetrisch bzgl. der x 3-Achse ist. In

diesem Fall gibt es drei Erhaltungsgrößen, nämlich die Energie, den Drehimpuls

um die x 3-Achse und den Drehimpuls um die Symmetrieachse des Kreisels. Man

kann zeigen, daß es dann Zahlen α,β,a,b,c gibt, die nur von den Erhaltungsgrößen,

der Gravitationskonstanten und der Massenverteilung im Kreisel abhängen, so daß

die Eulerschen Winkel die folgenden Differentialgleichungen erfüllen (vgl. [Arnold],

Kapitel 6)

d

2

cos ϑ

=

(α − β cos ϑ)(sin ϑ)2 − (a − b cos ϑ)2

dt

d ϕ

a − b cos ϑ

=

dt

(sin ϑ)2

d ψ

d ϕ

=

$c - \cos\vartheta \cdot$

dt

dt

Setzt man $u = \cos\vartheta$, und schreibt man $\dot{}$ statt d , so sind diese Differentialgleichun-

dt

gen

.

u 2

=

$f(u) := (\alpha - \beta u)(1 - u\,2) - (a - bu)2$

(6.14)

$a - bu$

.

ϕ

=

(6.15)

$1 - u\,2$

.

ψ

=

$c - u$.

ϕ

(6.16)

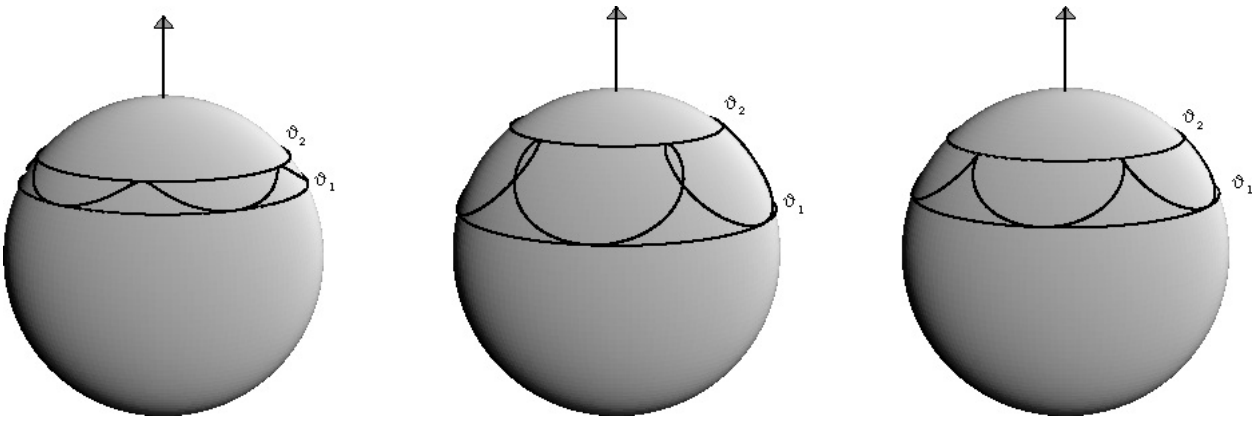
.

.

.

.

.



Da $-1 \le u \le 1$, und u 2 nicht negativ ist, gibt es physikalisch relevante Lösungen

nur, wenn f im Intervall $[-1, 1]$ nichtnegative Werte annimmt. Man beachte, daß

$f(\pm 1) = -(a \mp b)2 \le 0$, und daß im Fall $f(\pm 1) = 0$ die Funktion an der Stelle ± 1

eine doppelte Nullstelle hat (siehe Bild 6.27). Wir betrachten den Fall, daß *f* keine

f(u)

f(u)

f(u)

-1 u1

u2

1

u

-1

1

u

-1

1

u

Bild 6.27

doppelten Nullstellen hat. Seien $u_1 \leq u_2$ die beiden Nullstellen von *f* im Intervall

[0 , 1]. Dann zeigt (6.14), daß $u(t)$ stets zwischen u_1 und u_2 hin - und herpendelt, d.h., ϑ variiert periodisch zwischen $\vartheta_1 := \arccos u_1$ und $\vartheta_2 := \arccos u_2$. Diese periodische Änderung der Inklination“ ϑ des Kreisels nennt man *Nutation*. ϑ und ϕ sind die

”

Polarkoordinaten der Spitze des Kreisels“. Die Änderung des Azimuthwinkels“ ϕ

”

”

nennt man *Pr*¨

azession. Falls *a* nicht im Intervall [*u*

b

1 ,*u* 2] liegt, folgt aus (6.15), daß ϕ

konstantes Vorzeichen hat, d.h. daß ϕ monoton ist. Die Bewegung der Kreiselspitze

sieht also ungefähr so aus wie links in Bild 6.28. Falls $a \in$] *u*

b

1 ,*u* 2[, so ändert sich

Bild 6.28

das Vorzeichen von ˙

ϕ dauernd und die Spitze des Kreisels überschlägt sich (siehe

Bild 6.28, Mitte). Falls $a = u$

$= u$

b

1 oder *a*

b

2, so führt die Spitze des Kreisels

eine Bewegung wie diejenige rechts in Bild 6.28 aus. Zusätzlich zur Nutation und

Präzession dreht sich der Kreisel um seine eigene Symmetrieachse, diese Bewegung

wird durch (6.16) beschrieben. Eine Diskussion vieler verschiedener Kreiseltypen und

Kreiselbewegungen findet man in dem Standardwerk [Klein–Sommerfeld] .

.

.

.

6.8.2

Quaternionen

In einer Übung am Ende von Abschnitt 6.3 haben wir gesehen, daß für je zwei Pauli-

Matrizen σj und σk das Produkt $-\sigma j \circ \sigma k$ von $i\,\sigma j$ und $i\,\sigma k$ bis aufs Vorzeichen

die Einheitsmatrix 11 oder das $i-$ fache einer Pauli-Matrix ist. Es sei H der von

11 ,$i\,\sigma$ 1 ,$i\,\sigma$ 2 und $i\,\sigma$ 3 aufgespannte R − Untervektorraum des Raums aller komplexen

(2 × 2) − Matrizen. Für je zwei Elemente Z,Z von H ist dann $Z \circ Z \in$ H. Man kann

H auch anders beschreiben.

Lemma 134

H = λA $\lambda \in$ R , $A \in SU(2)$

Beweis Sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathrm{R}$, so ist

$\alpha + i\beta$

$-\gamma - i\delta$

$\alpha\, 11 + \beta i\sigma\, 3 - \gamma i\sigma\, 2 - \delta i\sigma\, 1 =$

$\gamma - i\delta$

$\alpha - i\beta$

Also ist

1

$\alpha\, 11 + \beta i\sigma\, 3 - \gamma i\sigma\, 2 - \delta i\sigma\, 1$

$\in SU(2)$

$\alpha\, 2 + \beta\, 2 + \gamma\, 2 + \delta\, 2$

Ist umgekehrt

a

b

$A =$

$_{-}{}^{-}$

mit $a\, 2 + b\, 2 = 1$

b

$_{-}$

a

eine Matrix in SU (2), so ist mit $\alpha := \mathrm{Re}\, a$, $\beta := \mathrm{Im}\, a$, $\gamma := -\mathrm{Re}\, b$,$\delta := -\mathrm{Im}\, b$ $A =$

α 11 + $\beta i\sigma$ 3 − $\gamma i\sigma$ 2 − $\delta i\sigma$ 1

✷

Bemerkung: Normalerweise wählt man 11 ,i σ 3 , − i σ 2 , − i σ 1 als Basis von H. Darum

haben wir die Vorzeichen im obigen Beweis etwas seltsam gewählt.

Wir haben H auf zwei verschiedene Arten beschrieben – einerseits als den von

11 ,i σ 1 ,i σ 2 ,i σ 3 aufgespannten R-Vektorraum, andererseits als die Menge der reellen

Vielfachen von Elementen von *SU* (2). Das zeigt, daß auf H zwei Verknüpfungen

definiert sind, nämlich Addition und Multiplikation von Matrizen. Es ist leicht zu

sehen, daß gilt:

Satz 6.12

(i) H *ist bezüglich der Addition von Matrizen eine Abel'sche Gruppe.*

(ii) H \

0

0

ist eine Gruppe bez¨

uglich Matrizenmulitplikation.

0

0

(iii) F¨

ur $Z_1, Z_2, Z_3 \in \mathrm{H}$ *ist*

$$Z_1 \circ (Z_2 + Z_3) = Z_1 \circ Z_2 + Z_1 \circ Z_3$$

$$(Z_1 + Z_2) \circ Z_3 = Z_1 \circ Z_3 + Z_2 \circ Z_3$$

H erfüllt also alle Axiome für einen Körper bis auf die Forderung, daß die Multiplika-

tion kommutativ ist. Mengen mit zwei Verknüpfungen, für die die Aussagen (i) - (iii)

des obigen Satzes gelten, nennt man *assoziative Divisionsalgebren* oder *Schiefk¨*

orper .

Die Divisionsalgebren H nennt man auch die (Hamilton'schen) *Quaternionen*. Zur

Geschichte und für eine weitergehende Untersuchung der Quaternionen siehe z.B.

[Ebbinghaus et al.] Kapitel 6. Die Quaternionen enthalten einen zu R und einen zu

C isomorphen Unterkörper, denn die Abbildungen

$$\mathrm{R} \longrightarrow \mathrm{H}$$

$$t \to t \cdot 11$$

$$\mathrm{C} \longrightarrow \mathrm{H}$$

$$z \to (\operatorname{Re} z) \cdot 11 + (i \operatorname{Im} z) \cdot \sigma_3$$

induzieren Isomorphismen zwischen R bzw. C und Unteralgebren von H. Nach

der

Entdeckung der Quaternionen suchte man im letzten Jahrhundert nach weiteren

Mengen A mit Verknüpfungen + und $\circ$, für die gilt:

$(A, +)$ *ist eine kommutative Gruppe.*

$a \circ (b + b) = a \circ b + a \circ b$

$(a + a) \circ b = a \circ b + a \circ b$

für $a,a ,b,b \in A$

$a \circ b = a \circ b$

$\Rightarrow$

$b = b$

$a \circ b = a \circ b$

$\Rightarrow$

$a = a$

für $a,a ,b,b \in A$

Es gibt $11 \in A$ *so daß* $a \circ 11 = 11 \circ a = a$ *für alle* $a \in A$ *, und es gibt eine injektive*

Abbildung $\phi : \mathrm{R} \longrightarrow A$*, so daß für* $t,t \in \mathrm{R}$

$\phi (t + t)$

$=$

$\phi (t) + \phi (t)$

$\phi (t \cdot t)$

=

$\phi(t) \circ \phi(t)$

$\phi(1)$

=

11

und so, daß die Operation von R *auf A*

$\mathrm{R} \times A \longrightarrow A$

$(t,a) \longrightarrow \phi(t) \circ a$

$(A, +)$ *zu einem endlichdimensionalen* R *-Vektorraum macht.*

Ein solches Gebilde heißt (endlichdimensionale) *Divisionsalgebra* (mit Eins) über

R. Der Körper C der komplexen Zahlen ist also eine Divisionsalgebra der Dimen-

sion 2 über R, und H ist eine Divisionsalgebra der Dimension 4 über R. Im Jahre

1845 entdeckte Cayley eine Divisionsalgebra der Dimension 8 über R, bei der die

Multiplikation ◦ - im Gegensatz zu den obigen Beispielen - nicht assoziativ ist (siehe

[Ebbinghaus et al.], Kapitel 8). Man nennt sie die Cayley-Oktaven“. M. Kervaire

”

und J. Milnor haben 1958 bewiesen, daß jede endlichdimensionale Divisionsalgebra

über R die Dimension 2 , 4 oder 8 hat. Damit kann man zeigen, daß jede solche Di-

visionsalgebra isomorph zu R , C , H oder den Cayley-Oktaven ist. Der Beweis des

Satzes von Kervaire - Milnor verwendet Methoden der algebraischen Topologie (vgl.

[Ebbinghaus et al.], Kapitel 10); bis heute ist kein rein algebraischer Beweis bekannt.

.

.

6.8.3

Endliche Untergruppen von SU(2)

In Abschnitt 1.3, Satz 1.7 haben wir gesehen, daß jede endliche Untergruppe von

$SO(3)$ konjugiert ist zu einer der folgenden Gruppen:

(i)

C n =

S 3 ($j \cdot 360 \circ$) $0 \leq j \leq n - 1$

$n \geq 1$,

n

(ii) der Gruppe D *n aller Drehungen im Raum, die ein reguläres n−Eck mit Schwer-*

punkt 0 *in sich* ¨

uberf¨

uhren ($n \geq 3$) *, bzw. der Klein'schen Vierergruppe* D2 ,

(iii) der Gruppe T *aller Drehungen, die ein reguläres Tetraeder in sich überführen,*

(iv) der Gruppe O *aller Drehungen, die einen Würfel in sich überführen,*

(v) der Gruppe I *aller Drehungen, die ein Ikosaeder in sich überführen.*

Den Homomorphismus $\rho : SU(2) \longrightarrow SO(3)$ kann man verwenden, um alle endlichen

Untergruppen von $SU(2)$ zu klassifizieren. Es ergibt sich

Satz 6.13 *Jede endliche Untergruppe von* $SU(2)$ *ist konjugiert zu einer der folgen-*

den Gruppen

ζj

0

(i)

$j = 0, 1, \cdots, n-1$

, wobei $\zeta = e^{2\pi i/n}$, $n \geq 1$,

0

ζ^{-j}

(ii) $\rho^{-1}(D_n)$ *mit*

$n \geq 2$,

(iii) der

bin¨

aren Tetraedergruppe“ $\rho^{-1}(T)$,

”

(iv) der

bin¨

aren Oktaedergruppe“ $\rho - 1(\mathrm{O})$,

”

(iv) der

bin¨

aren Ikosaedergruppe“ $\rho - 1(\mathrm{I})$,

”

Zum Beweis benutzen wir

Lemma 135 *Sei G eine endliche Untergruppe von SU* (2) *, so daß* $\rho(G)$ *aus zwei*

Elementen besteht. Dann ist $-11 \in G$.

Beweis Wäre -11 /

$\in G$, so bestünde G nach Satz 6.5 aus genau zwei Elementen.

Eines davon ist 11, nennen wir das andere A. Offenbar ist $A\ 2 = 11$. Jedes Element

von SU (2) ist konjugiert zu einer Diagonalmatrix. Insbesondere ist A konjugiert zu

ζ

0

einer Matrix $A =$

0

$\zeta - 1$

. Da $(A)2 = 11$ ist $\zeta 2 = 1$. Damit ist $A = \pm 11$.

Die Matrizen ± 11 sind nur zu sich selbst konjugiert, also ist $A = \pm 11$. Dies ist ein

Widerspruch zu den Annahmen.

✷

.

Beweis des Satzes: Sei G eine endliche Untergruppe von $SU(2)$. Dann ist $H :=$

$\rho(G)$ eine endliche Untergruppe von $SO(3)$. Nach Konjugation in $SU(2)$ können wir

annehmen, daß H eine der Gruppen C_n, D_n, T , O oder I ist. Die Gruppen D_n, T , O , I enthalten alle eine Untergruppe H der Ordnung zwei (bestehend aus *id* und einer Drehung um 180°). Ist also $H = D_n, T, O, I$, so ist nach obigem Lemma $-11 \in$

$\rho^{-1}(H) \cap G \subset G$. Nach Satz 6.5 ist dann $G = \rho^{-1}(H)$. Den Fall, daß $H = C_n$ ist, überlassen wir den LeserInnen als Übung.

✷

Die endlichen Untergruppen von $SU(2)$ heißen auch die *binären* Polyedergrup-

pen. Sie spielen eine wichtige Rolle in vielen verschiedenen Gebieten der Mathematik

(siehe z.B. [Klein 1884], [Slodowy]). Wir wollen hier nur einen Punkt erwähnen:

Die

binäre Ikosaedergruppe $\rho^{-1}(\mathrm{I})$ besteht aus 120 Elementen von $SU(2)$. Das Bild von

$\rho^{-1}(\mathrm{I})$ unter der Abbildung $T : SU(2) \to S^3$ von Lemma 126 besteht also aus 120

Punkten auf der 3-Sphäre S^3. Diese 120 Punkte sind die Eckpunkte eines vierdimen-

sionalen regulären Polyeders, das 720 Kanten, 1200 Dreiecke als zweidimensionale

Seitenflächen und 600 reguläre Tetraeder als dreidimensionale Seiten hat. Die Sym-

metriegruppe dieses Polyeders hat die Ordnung 14400. Für genauere Untersuchungen

dieses Körpers siehe [Coxeter 1973] 8.5.

6.8.4

$SL(2, \mathbb{C})$ **und** $SO^+(3, 1)$

Satz 6.5 und Satz 5.7 haben eine sehr ähnliche Struktur. In der Tat sind beide Sätze

Spezialfälle eines noch allgemeineren Resultats. Wie in Abschnitt 5.4 betrachten wir

die Lorentz-Gruppe

$$\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$

1

0

0

0

1

0

0

0

⎪ 0 1 0

0 ⎪

⎪ 0 1 0

0 ⎪

$SO+(3\ ,\ 1) =$

$A \in SL(4\ ,\ \mathrm{R})\ A \circ \backslash$

$\rfloor \circ A = \backslash$

$\rfloor\ ,a$

0

0

1

0

0

0

1

0

44 ≥ 1

0

0

0

− 1

0

0

0

− 1

Diese Gruppe enthält die zu $SO(3)$ isomorphe Untergruppe

R

0

G 1 :=

$R \in SO(3)$

0

1

und die zu $SO+(2\ ,\ 1)$ isomorphe Untergruppe

(

⎝

a

⎛

⎝

11

a 12 0 a 13

⎜

a

a

⎜

11

a 12 a 13

G

21

a 22 0 a 23

⎞

⎠

2 :=

⎞

⎠

a

$\in SO+(2\ ,\ 1)$

0

0

1

0

21

a 22 a 23

a

a

31

a 32 a 33

31

a 32 0 a 33

Wir identifizieren $SO(3)$ bzw. $SO+(2\ ,\ 1)$ in der naheliegenden Weise mit G 1 bzw.

G 2.

Die Gruppen SU (2) bzw. SU (1 , 1) sind Untergruppen der Gruppe $SL(2\ ,\ \mathrm{C})$ aller

komplexen (2×2)-Matrizen mit Determinante 1. Ziel dieses Abschnitts ist es, einen

.

.

6.8 Ergänzungen zu Kapitel 6

Homomorphismus $\rho : SL(2 , \mathrm{C}) \longrightarrow SO{+}(3 , 1)$ zu konstruieren, so daß $\rho (SU (2)) =$

$G 1 , \rho (SU (1 , 1)) = G 2$ und so, daß die Einschränkung von ρ auf $SU (2)$ mit der Abbildung von Satz 6.5 und die Einschränkung von ρ auf $SU (1 , 1)$ mit der Abbildung

aus Abschnitt 5.5.2 übereinstimmt (unter Verwendung der oben gemachten Identi-

fikationen). Dazu verwenden wir, daß die Gruppe $SO{+}(3 , 1)$ auf dem Lichtkegel in

der 4-dimensionalen Lorentz-Geometrie

$K := \{ (x 1 ,x 2 ,x 3 ,t) \in \mathrm{R}3 \times \mathrm{R} \mid x 2 + x 2 + x 2 - t 2 = 0 \}$

1

2

3

durch

$SO{+}(3 , 1) \times K$

$\longrightarrow K$

$(A , (\mathbf{x} ,t))$

$\longrightarrow A \cdot (\mathbf{x} , \mathbf{t})$

operiert. Dieser Lichtkegel enthält eine 2-dimensionale Sphäre, nämlich

$S := \{ (x 1 ,x 2 ,x 3 ,t) \in K \mid t = 1 \}$

t

S

R3

Bild 6.29

Die Operation von $SO+(3\,,1)$ auf K induziert eine Operation auf S. Ist nämlich

$(\mathbf{x}\,,t) \in S$ und $A \in SO+(3\,,1)$, so ist $A \cdot (\mathbf{x}\,,t) \in K$ ein Vektor der Gestalt $A \cdot (\mathbf{x}\,,t) = (\mathbf{x}\,,t\,)$

mit

$t = 0$

Folglich liegt

1

$\Psi\, A\,(\mathbf{x}\,,t) :=$

$(\mathbf{x}\,,t\,)$

t

auf S. Es ist leicht nachzuprüfen, daß

$SO+(3\,,1) \times S \longrightarrow S$

$(\,A,\,(\mathbf{x}\,,t))$

$\rightarrow$

$\Psi\, A\,(\mathbf{x}\,,t)$

.

.

.

eine Operation der Gruppe $SO+(3\,,\,1)$ auf S ist. Wie gesagt, ist S eine 2-Sphäre.

Genauer ist die Abbildung

S

$-\!\!\to S\,2$

$(\,x\,1\,,x\,2\,,x\,3\,,\,1)$

$\to\,(\,x\,1\,,x\,2\,,x\,3)$

eine Bijektion. Die Hintereinanderschaltung dieser Bijektion mit der stereographi-

schen Projektion $p : S\,2 -\!\!\to$ P1C der 2-Sphäre auf die Riemann'sche Zahlenkugel

P1C bezeichnen wir mit

$q : S -\!\!\to$ P1C

Satz 6.14 *Es gibt einen surjektiven Gruppenhomomorphismus*

$\rho : SL(2\,,\,\mathrm{C}) -\!\!\to SO+(3\,,\,1)$

so daß f¨

ur alle $A \in SL(2\,,\,\mathrm{C})$ *und alle* $z \in$ P1C

$q-1\,(\,\phi A\,(\,z)) = \Psi\,\rho\,(\,A)\,(\,q-1\,(\,z))$

(6.17)

Die Einschr¨

ankungen von ρ *auf* $SU\,(2)$ *bzw.* $SU\,(1\,,\,1)$ *stimmen mit den in Satz 6.5*

bzw. Abschnitt 5.5.2 beschriebenen Abbildungen ¨

uberein.

Beweisidee: Nach Konstruktion und Satz 6.5 ist klar, daß (6.17) für alle $A \in$

$SU(2)$ gilt. Wie im Beweis von Satz 5.7 rechnet man nach, daß für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und

$(x_1, x_2, x_3, 1) \in S$ gilt

x

$q(\Psi$

$1 \cosh 2\alpha + \sinh 2\alpha + ix_2$

$L(-2\alpha)(x_1, x_2, x_3, 1))$

$=$

$x_1 \sinh 2\alpha + \cosh 2\alpha - x_3$

$(x$

$=$

$1 + i x_2) \cosh \alpha + (1 - x_3) \sinh \alpha$

$(x_1 + i x_2) \sinh \alpha + (1 - x_3) \cosh \alpha$

$= \rho$

$(q(x$

$\cosh \alpha \sinh \alpha$

$1, x_2, x_3, 1)$

$\sinh \alpha \cosh \alpha$

Folglich gilt (6.17) auch für alle Elemente der Form

$\cosh \alpha$

sinh α

$A =$

sinh α

cosh α

Da die Gruppe $SU(1,1)$ von den Elementen dieser Gestalt und den Drehungen,

d.h. den Elementen von $SU(2) \cap SU(1,1)$ erzeugt wird, gilt (6.17) auch für alle Ele-

mente der Untergruppe $SU(1,1)$. Schließlich prüft man leicht nach, daß $SL(2, \mathrm{C})$

von $SU(1,1)$ und $SU(2)$ erzeugt wird. Folglich gibt es einen Homomorphismus ρ :

$SL(2, \mathrm{C}) \longrightarrow SO^+(3,1)$, für den (6.17) gilt und dessen Einschränkungen auf $SU(2)$

und $SU(1,1)$ die gewünschten Eigenschaften haben. Da $SO^+(3,1)$ von G_1 und G_2

erzeugt wird, ist ρ auch surjektiv. Der Homomorphismus $\rho : SL(2, \mathrm{C}) \longrightarrow SO^+(3,1)$ heißt die *Spinorenabbildung*. Seine physikalische Bedeutung wird in [Naber] 1.7 diskutiert.

.

6.8 Ergänzungen zu Kapitel 6

Die Spinorenabbildung läßt sich auch algebraisch beschreiben (vgl. z.B. [Hein]

4.14 , [Naber] 1.7). Sei *Herm* der Vektorraum, der von den Matrizen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ und

$\mathbb{1}$ aufgespannt wird und

~

X : R4 → *Herm*

(x 1 ,x 2 ,x 3 ,t) → x 1 σ 1 + x 2 σ 2 + x 3 σ 3 + t 11

Satz 6.15 *F*¨

ur alle $A \in SL$(2 , C) *und* (x 1 ,x 2 ,x 3 ,t) ∈ R4 *gilt*

⎛

⎝

x 1

⎜ x ⎜

ρ(A) · ⎝ 2 ⎠ = ~

X− 1 A ◦ ~

X(x

x

1 ,x 2 ,x 3 ,t) ◦ ¯

A

3

t

6.8.5

Die Zopfgruppe als Fundamentalgruppe

In Abschnitt 1.2 haben wir als Beispiel einer Gruppe die Zopfgruppe *Zn* eingeführt.

Wir konnten dort nicht exakt formulieren, was ein Zopf“ ist. So sagten wir, zwei

”

Zöpfe seien gleich, wenn sie auseinander durch Verschieben der Stränge hervorgehen.

Nun sind wir in der Lage, eine präzise Definition zu geben, nämlich:

Xn

$=$

$(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ das Polynom $z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$ hat keine mehrfache Nullstelle

Wir wollen hier erklären, wieso diese Definition mit der in Abschnitt 1.2 entwickel-

ten Anschauung übereinstimmt. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra hat jedes

Polynom n-ten Grades mit komplexen Koeffizienten genau n Nullstellen (mit Mul-

tiplizität gezählt). Ist also $a = (a_1, \cdots, a_n) \in X_n$, so hat das Polynom

$P_a(z) := z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$

n verschiedene Nullstellen. Ist nun $t \mapsto a(t)$ ein geschlossener Weg in X_n, so variie-

ren diese Nullstellen stetig mit t, bleiben aber stets paarweise verschieden. Zeichnet

man in $[0, 1] \times \mathbb{C}$ die Menge

$(t, z) \in [0, 1] \times \mathbb{C}\ P_{a(t)}(z) = 0$

so entsteht ein Zopf mit n Strängen. Ändert man $t \to a(t)$ durch eine Homotopie in

Xn ab, so werden bei dem entsprechenden Zopf die Stränge verschoben, ohne daß

sie sich dabei je durchdringen. Mit der eben beschriebenen Konstruktion erhält man

einen Homomorphismus

$\phi : \pi 1(Xn, \hat{} a) - \rightarrow Zn$

Dabei ist ˆ

a der Basispunkt in Xn, für den die Nullstellen von $P\hat{} a$ den Anfangs- und

Endpunkten der Zöpfe entsprechen. Man kann nachprüfen, daß ϕ ein Gruppeniso-

morphismus ist.

Anhang A: Vorkenntnisse

In der folgenden Tabelle sind die wichtigsten zum Verständnis der einzelnen Abschnitte notwen-

digen Vorkenntnisse aufgeführt, soweit sie nicht bereits vorher in dem Kapitel, das diesen Abschnitt

enthält, behandelt wurden. Wenn Begriffe oder Sätze in einem anderen Kapitel dargestellt sind,

so ist dies in Klammern vermerkt. Die mit * markierten Themen werden nur an einer einzigen

Stelle des Abschnitts verwendet und sind für das Verständnis des Gesamtzusammenhangs nicht

erforderlich.

Abschnitt

Begriffe

Sätze

Kapitel 1

Symmetriegruppen

1.1 Isometrien

Abbildungen der Ebene bzw. des

Eine stetige Funktion auf der

der Ebene und

Raums in sich. Stetige

2–Sphäre nimmt ihr Maximum an.*

des Raums

Funktionen auf der 2–Sphäre.*

Assoziativität der Hintereinan–

derschaltung von Abbildungen.

1.2 Gruppen und

Mengen. Produkt zweier Mengen.

Gruppenoperationen

Abbildungen zwischen Mengen.

1.3 Endliche

Existenz des Ikosaeders.*

Symmetriegruppen

Kapitel 2

Skalarprodukt und

Vektorprodukt

2.1 Skalarprodukt

Stetige Funktionen einer reellen

Zwischenwertsatz.

von Vektoren

Veränderlichen.

2.2 Das Vektorprodukt

Stetige Abbildungen R −→ R3. *

Zwischenwertsatz.

Kapitel 3

Das Parallelenaxiom

3.1 Axiome der

Schreibweise der elementaren

Euklidischen Geometrie

Logik, Quantoren.* Äquivalenz–

relationen. Skalarprodukt

und Länge von Vektoren

in R2 (Abschnitt 2.1).

355

Abschnitt

Begriffe

Sätze

3.2 Das Poincaré–

Komplexe Zahlen und ihr

Rechenregeln für (2 × 2)–Matrizen

- Modell der

Absolutbetrag. Stetige Funktionen

über C . Rechenregeln für

hyperbolischen Ebene

einer reellen Veränderlichen.

komplexe Konjugation in C .

Gruppen

Zwischenwertsatz. Stetige

(Abschnitt 1.2).

Bijektionen zwischen Intervallen

sind monoton.

3.3 Das Doppelver–

e und der natürliche

Rechnen mit Grenzwerten bei

hältnis und die

Logarithmus. Lineare Unabhängig–

Funktionen einer reellen Ver–

Längenmessung in

keit von Vektoren in C2 . Basen

änderlichen. Gauß’scher

der hyperbolischen

in C2 .

Algorithmus für komplexe

Ebene

(2 × 2)–Matrizen.

Je zwei Basen von C2

lassen sich durch eine inver–

tierbare Matrix ineinander

überführen.

3.4 Die Winkel–

Differenzieren von Funktionen

Kettenregel. Satz über

messung in der hyper–

einer reellen Veränderlichen.

inverse Funktionen.

bolischen Ebene

Kapitel 4

Kegelschnitte

4.1 Normalformen

sin , cos , sinh , cosh.

Additionsgesetz für

Homöomorphismus*. Lösen

sin und cos .

quadratischer Gleichungen in

einer Veränderlichen.

4.2 Brennpunkte

Umgebung eines Punktes in R2 .

Kettenregel. Satz über

und Brenngeraden

Differenzieren von Funktionen

inverse Funktionen. Ableitung

einer reellen Veränderlichen.

von sin , cos .

arc cos . Skalarprodukt

in R2 (Abschnitt 1.2).

6 Anhang A: Vorkenntnisse

Abschnitt

Begriffe

Sätze

4.3 Schnitt eines

Diskriminante einer quadratischen

Zwischenwertsatz. Ein

Kegelschnitts mit

Gleichung.

System von vier homogenen

einer Geraden

linearen Gleichungen in

oder einem zweiten

fünf Veränderlichen hat eine

Kegelschnitt

nichttriviale Lösung.

4.4 Konfokale Kegel–

Zwischenwertsatz.

schnitte

4.5 Die Sätze von

Dichte Teilmengen von S 1 .

Eine stetige Funktion auf S 1 ,

Pascal und Brianchon

Stetigkeit von Funktionen

die auf einer dichten Teilmenge

auf Teilmengen von S 1 .

verschwindet, ist identisch

Null.

4.6 Dualität

Lösbarkeit inhomogener

(2 × 2)–Gleichungssysteme.

Kapitel 5

(3 × 3)–Matrizen. Skalar–

Quadriken in R3

produkt in R3 (Abschnitt 1.2).

Transponierte Matrix.

5.1 Hauptachsen–

Differenzieren von Funktionen

Eine stetige Funktion auf

transformation für

in einer reellen Veränderlichen.

der 2–Sphäre nimmt ihr

quadratische Formen

Lineare Abbildungen. Basen

Maximum an. Verschwinden

von R3.

der ersten Ableitung einer

Funktion ist notwendige

Bedingung für Extremum.

Die Hintereinanderschaltung

von Drehungen um eine

Achse in R3 durch *O* ist

wieder eine Drehung um

eine Achse durch *O*

(Satz 1.6).*

5.2 Normalformen

Klassifikation der

Kegelschnitte (Abschnitt 4.1).

.
.
.
.
.

357

Abschnitt

Begriffe

Sätze

5.3 Geraden auf

Lineare Unabhängigkeit von

Zwischenwertsatz. Determinante

einem einschaligen

Vektoren in R3 . Normalformen

von (2 × 2)–Matrizen. Vier

Hyperboloid

für Kegelschnitte (Abschnitt 4.1).

Vektoren in R3 sind stets

Schnitte von Geraden und Kegel–

linear abhängig.

schnitten (Abschnitt 4.3).

5.4 Lorentz–Geometrie

Determinante von

Rechenregeln für

(3 × 3)–Matrizen. Gruppen

sinh und cosh. Cauchy–

und Gruppenoperationen

Schwarz’sche Ungleichung

(Abschnitt 2.1).

in R2 (Abschnitt 2.1).

Kapitel 6

Lineare Abbildungen von R3

Für (3×3)–Matrizen gilt:

Die Geometrie der

nach R3 . Determinanten von

Gruppe SO(3)

(3×3)–Matrizen. Transponierte

$\det(A\,B) = (\det A)(\det B)$

Matrix. Beschreibung linearer

$\det AT = \det A$

Abbildungen bzgl. beliebiger

$\det A = 0 \Rightarrow \exists\, v = 0 : A\,v = 0$

Basen durch Matrizen.

Skalarprodukt in R3 (Abschnitt 2.1).

Gruppen (Abschnitt 1.2).

6.1 Eulersche

sin , cos .

Winkel

6.2 Die Liealgebra

Differenzieren von Funktionen

Produktregel.

sO(3)

einer reellen Veränderlichen.

$(A \cdot B)\, T = BT \cdot AT$ für

Vektorprodukt in R3

(3×3)–Matrizen A,B.

(Abschnitt 2.2). Untervektor–

räume. Basen eines Vektorraums.

Gruppenoperationen (Abschnitt 1.2).

6.3 Die stereogra–

Die Riemannsche Zahlenkugel

Gebrochen lineare Transfor–

phische Projektion

und die Operation von $GL(2\ ,\ \mathrm{C})$

mationen bilden Kreise und

durch gebrochen lineare

Geraden auf Kreise oder

Transformationen* (Abschnitt

Geraden ab* (Abschnitt 3.3).

3.3).

Abschnitt

Begriffe

Sätze

6.4 Die Pauli–

Spur einer (2 × 2)–Matrix.

Die Spur von (2 × 2)–Matrizen

Matrizen

ändert sich bei Konjugation

nicht.

6.5 Ein Weg in SO(3),

Stetige Abbildungen

der nicht zusammen–

zwischen Teilmengen

ziehbar ist

von R n und R m .

6.6 Die Fundamental–

Homöomorphismen. Offene,

Eine Abbildung ist stetig genau

gruppe

abgeschlossene, kompakte Teil–

dann, wenn das Urbild jeder

mengen von Teilmengen des R n .

offenen Menge offen ist.

Zusammenhang. Zusammenhangs–

Stetige Funktionen auf

komponenten.

kompakten Intervallen sind

gleichmässig stetig. Bilder

kompakter Mengen unter

stetigen Abbildungen sind

kompakt.

6.7 Die

Hopfabbildung

Anhang B: Hinweise zum

Literaturverzeichnis

Wenn Sie mehr über die behandelten Themen erfahren oder andere geometrische

Themen auf vergleichbarem Niveau kennenlernen möchten, sollten Sie auf jeden Fall

zu den Klassikern [Hilbert–Cohn Vossen] (1932), [Klein 1926] und [Coxeter 1963]

greifen. Sie enthalten eine Fülle von Material in sehr anschaulicher Darstellung. Eine

wahre Fundgrube ist das Buch von [Berger], das im eher strengen Stil der modernen

Mathematik geschrieben ist.

Ins Literaturverzeichnis habe ich neben den zitierten Büchern und Artikeln auch

Bücher aufgenommen, die als weiterführende Literatur zu den behandelten Themen

geeignet sind – die Auswahl ist allerdings subjektiv und natürlich auch vom Zufall

beeinflußt.

Der gruppentheoretische Aspekt der Geometrie – der ja auch in diesem Buch eine

wichtige Rolle spielt – wird besonders betont in [Burn], [Neumann–Stoy–Thompson],

[Nikulin–Shafarevich]. Speziell von diskreten Bewegungsgruppen handeln [Armstrong],

[Bigalke–Wippermann], [Burckhardt], [Grove–Benson], [Quaisser]. Zwei der vielen

Bücher, die konkrete Anwendungen des Konzepts Symmetrie“ in der Physik be-

”

schreiben, sind [Burns–Glazer] und [Cornwell].

Mehr über die in Kapitel 2 behandelten Operationen mit Vektoren können Sie in

Büchern über Lineare Algebra oder auch in [Boltjanski–Jaglom] nachlesen.

Eine systematische Darstellung der Euklidischen Geometrie in moderner Sprache

findet sich z.B. in [Köcher–Krieg], [Kunz] oder [Hartshorne]. Über nicht-euklidische

Geometrie gibt es sehr viele empfehlenswerte Bücher; neben dem Buch von [Greenberg],

dessen Modifikation des Hilbert’schen Axiomensystems ich übernommen habe, möchte

ich auch auf [Golos], [Kelly–Matthews], [Martin], [McCleary], [Nöbeling], [Stahl] hin-

weisen. Bücher zur Geschichte der nicht-euklidischen Geometrie sind in Abschnitt

3.5.2 angegeben.

Kegelschnitte und Quadriken werden in den meisten Standardbüchern über Geo-

metrie behandelt, z.B. in [Bix], [Fischer], [Jennings], [Köcher–Krieg], [Roe]. Spezia-

lisiertere Texte, die z.T. auch eine historische Perspektive vermitteln, sind [Chasles],

[Coolidge], [Dingeldey], [Lebesgue], [Salmon–Fiedler], [Zeuthen].

Die Gruppe $SO(3)$ ist eines der wichtigsten Beispiele einer Liegruppe und wird meist in diesem allgemeineren Rahmen behandelt, siehe z.B. [Cornwell], [Hein], [Miller], [Varadarajan].

Noch ein Tip: Wenn Sie einfach einmal schöne Bilder geometrischer Objekte anschauen möchten, blättern Sie in [Mathematische Modelle]!

Literaturverzeichnis

[Armstrong]

M. Armstrong: *Groups and Symmetry*, Springer Undergraduate Texts in Mathematics 1988.

[Arnold]

V. I. Arnold: *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer 1978.

[Artin]

M. Artin: *Algebra*, Birkhäuser 1993.

[Audin]

M. Audin: *Geometry*, Springer 2003.

[Beles–Soare]

A. Beles, M. Soare: *Das elliptische und hyperbolische*

Paraboloid im Bauwesen, VEB Verlag für Bauwesen, Berlin 1970.

[Berger]

M. Berger: *Geometry*, 2 Bände, Springer 1987.

[Berger 1991]

M. Berger: *Billiards*, Pour la Science 163,76-85 (Mai 1991).

[Biermann]

K. Biermann (Herausgeber): *C.F. Gauß in Briefen und Gespr¨achen*, Verlag C. H. Beck 1990.

[Bigalke]

H.-G. Bigalke: *Kugelgeometrie*, Otto Salle Verlag/ Verlag Sauerländer, Aarau/Frankfurt 1984.

[Bigalke–Wippermann]

H.-G. Bigalke, H. Wippermann: *Regul¨are Parkettierungen*, BI Wissenschaftsverlag 1994.

[Birkhoff]

G. Birkhoff: *Dynamical Systems*, American Mathematical Society Colloquium Publications IX, 1927.

[Bix]

R. Bix: *Topics in Geometry*, Academic Press 1994.

[Blumenthal]

O. Blumenthal: *(David Hilbert's) Lebensgeschichte*, In: Gesammelte Abhandlungen von David Hilbert, Vol 3, pp. 388-429. Springer 1935.

[Boltjanski–Jaglom]

W. Boltjanski, I. Jaglom: *Vektoren und ihre Anwendungen in der Geometrie*, In: *Enzyklop¨ adie der Elementarmathematik IV (Geometrie)*, VEB Verlag der Wissenschaften, Berlin 1969

[Bonola–Liebmann]

R. Bonola, H. Liebmann: *Die Nichteuklidische Geometrie. Historisch–kritische Darstellung ihrer Entwicklung*, Teubner 1908.

[Bos *et al*.]

H. Bos, C. Kers, F. Oort, D. Raven: *Poncelet's closure theorem*, Expositiones Mathematicae 5, 289-364 (1987).

[Brieskorn]

E. Brieskorn: *Lineare Algebra und Analytische Geometrie I*, Vieweg 1983.

[Brieskorn–Knörrer]

E. Brieskorn, H. Knörrer: *Plane Algebraic Curves*, Birkhäuser 1986.

[Bühler]

W. Bühler: *Gauß, a Biographical Study*, Springer 1981.

[Bunimovich]

L. Bunimovich: *Dynamical systems of hyperbolic type with singularities*, In: *Encyclopedia of Mathematical Sciences*, Vol.2, *Dynamical Systems II.* pp 151-178., Springer 1989.

[Burckhardt]

J.J. Burckhardt: *Die Bewegungsgruppen der Kristallographie*, Birkhäuser 1947.

[Burg–Haf–Wille]

K. Burg, H. Haf, F. Wille: *H¨ohere Mathematik f¨ur Ingenieure IV:* Vektoranalysis und Funktionentheorie,

Teubner 1990.

[Burn]

R. Burn: *Groups, a Path to Geometry*, Cambridge University Press 1985.

[Burns–Glazer]

G. Burns, A. Glazer: *Space Groups for Solid State Scientists*, Academic Press 1990.

[do Carmo]

M. do Carmo: *Differentialgeometrie von Kurven und Fl¨achen*, Vieweg 1983.

[Capelo–Ferrari]

A. Capelo, M. Ferrari: *Beltrami's "bonnet"*, Bolletino di Storia delle Szienze Matematiche 2, 233-247 (1982).

[Cederberg]

J. Cederberg: *A Course in Modern Geometry*, Springer 1989.

[Chasles]

M. Chasles: *Geschichte der Geometrie*, Halle 1839, Sändig Reprint 1968.

[Coolidge]

J. Coolidge: *A History of the Conic Sections and Quadric Surfaces*, Oxford University Press 1945.

[Cornwell]

J. F. Cornwell: *Group Theory in Physics I*, Academic Press 1984.

[Courant]

R. Courant: *Vorlesungen ¨ uber Differential- und Integralrechnung*, 2 Bände, Springer 1928.

[Courant–Robbins]

R. Courant, H. Robbins: *Was ist Mathematik? 2. Auflage*, Springer 1967.

[Coxeter 1963]

H.S.M. Coxeter: *Unverg¨ angliche Geometrie*, Birkhäuser 1963.

[Coxeter 1973]

H.S.M. Coxeter: *Regular Polytopes*, Dover Publication

1973.

[Coxeter et al.]

H.M.S. Coxeter, M. Emmer, R. Penrose, M. Teubner (Herausgeber): *M. C. Escher: Art and Science*, North Holland 1986.

[Curl–Smalley]

R. Curl, R. Smalley: *Fullerene*, Spektrum der Wissenschaft 12/1991, pp. 88-98.

[Dingeldey]

F. Dingeldey: *Kegelschnitte und Kegelschnittsysteme*, in: Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften III, Teil2, 1. Hälfte, pp. 1-258. Teubner 1903-1915.

[Ebbinghaus et al.]

H. Ebbinghaus et al.: *Zahlen*, Springer 1983.

[Efimow]

N. W. Efimow: ¨

Uber die Grundlagen der Geometrie,

Vieweg 1970.

[Euklid]

Euklid: *Die Elemente (Buch I-III)*, Übersetzt und herausgegeben von C. Thaer. Ostwalds Klassiker der ex-

akten Wissenschaften Nr. 235. Leipzig 1933. Reprint

Vieweg 1973.

[Feynman–Leighton–Sands] R. Feynman, R. Leighton, M. Sands: *The Feynman Lec-*

tures on Physics I, Addison-Wesley 1965.

[Fischer]

G. Fischer: *Analytische Geometrie*, Vieweg 1978.

[Fladt–Baur]

K. Fladt, A. Baur: *Analytische Geometrie spezieller*

Fl¨

achen und Raumkurven, Vieweg 1975.

[Forster]

O. Forster: *Analysis 1,2*, Vieweg 1976.

[Fricke–Klein]

R. Fricke, F. Klein: *Vorlesungen ¨*

uber die Theorie der

automorphen Funktionen, Teubner 1901.

[Giering–Seybold]

O. Giering, H. Seybold: *Konstruktive Ingenieurgeome-*

trie, C. Hanser Verlag 1975.

[Golos]

E. Golos: *Foundations of Euclidean and Non-Euclidean Geometry*, Holt, Rinehart and Winston 1968.

[Goodstein]

D. Goodstein, J. Goodstein: *Feynman's verschollene Vorlesung: die Bewegung der Planeten um die Sonne*, Piper 1998.

[Gray]

J. Gray: *Linear Differential Equations and Group Theory from Riemann to Poincar´e*, Birkhäuser 1986.

[Greenberg]

M. Greenberg: *Euclidean and Non-Euclidean Geometries*, Freeman and Company 1972.

[Greenberg–Harper]

M. Greenberg, J. Harper: *Lectures on Algebraic Topology*, Benjamin Press 1981.

[Grove–Benson]

L. Grove, C. Benson: *Finite Reflection Groups*, Springer Graduate Texts in Mathematics 99 (1971).

[Hardy–Wright]

G. Hardy, W. Wright: *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford University Press 1938.

[Hartshorne]

R. Hartshorne:: *Geometry: Euclid and Beyond*, Springer 2000.

[Hein]

W. Hein: *Struktur- und Darstellungstheorie der klassischen Gruppen*, Springer 1990.

[Heuser]

H. Heuser: *Analysis II*, Teubner 1981.

[Hilbert]

D. Hilbert: *Grundlagen der Geometrie*, 11. Auflage. Teubner 1968.

[Hilbert–Cohn Vossen]

D. Hilbert, St. Cohn Vossen: *Anschauliche Geometrie*, 2.Auflage, Springer 1996.

[Hu]

S. Z. Hu: *Homotopy Theory*, Academic Press 1959.

[Hurwitz]

A. Hurwitz: ¨

Uber unendlich-vieldeutige geometrische

Aufgaben, insbesondre ¨

uber Schließungsprobleme, Ma-

thematische Annalen 15, 8-19 (1878).

[Jackson]

J. Jackson: *Klassische Elektrodynamik*, de Gruyter

1982.

[Jänich]

K. Jänich: *Vektoranalysis (2.Auflage)*, Springer 1992.

[Jennings]

G. Jennings: *Modern Geometry with Applications*,

Springer 1994.

[Kelly–Matthews]

P. Kelly, G. Matthews: *The Non-Euclidean Hyperbolic*

Plane, Springer 1981.

[Klein 1884]

F. Klein: *Vorlesungen* ¨

uber das Ikosaeder und die

Aufl¨

osung der Gleichung f¨

unften Grades, Teubner 1884.

Reprint mit Einführung und Kommentaren von P. Slodowy, Birkhäuser 1993.

[Klein 1871]

F. Klein: ¨ *Uber die sogenannte nicht–euklidische Geometrie*, Math. Annalen 4, 573-625 (1871), auch Gesammelte Werke, Band I, pp. 254-305.

[Klein 1926]

F. Klein: *Vorlesung* ¨ *uber h*¨ *ohere Geometrie*, 3. Auflage, Springer 1926.

[Klein–Sommerfeld]

F. Klein, A. Sommerfeld: ¨ *Uber die Theorie des Kreisels*, Teubner 1910, Johnson Reprint 1965.

[Klemm]

M. Klemm: *Symmetrien von Ornamenten und Kristal-*

len, Springer 1982.

[Kline]

M. Kline: *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press 1972.

[Klingenberg]

W. Klingenberg: *Lineare Algebra und Geometrie*, Springer 1983.

[Knorr]

W. Knorr: *The Ancient Tradition of Geometric Problems*, Birkhäuser 1986.

[Köcher]

M. Köcher: *Lineare Algebra und Analytische Geometrie*, Springer 1983.

[Köcher–Krieg]

M. Köcher, A.Krieg: *Ebene Geometrie*, Springer 1993.

[Kowalsky]

H. Kowalsky: *Lineare Algebra (9.Auflage)*, de Gruyter 1979.

[Kozlov–Treshchëv]

V. Kozlov, D. Treshchëv: *Billiards*, American Mathematical Society 1991 (Translations of Mathematical Mono-

graphs 89).

[Krätschner–Schuster]

W.Krätschner, H. Schuster: *Von Fuller bis zu Fullerenen*, Vieweg 1995.

[Kuiper]

N. Kuiper: *Linear Algebra and Geometry*, North Holland 1962.

[Kunz]

E. Kunz: *Ebene Geometrie*, Vieweg 1976.

[Lang]

S. Lang: *Elliptic Functions*, Addison-Wesley 1973.

[Lebesgue]

H. Lebesgue: *Les Coniques*, Gauthier–Villars 1942, Reprint Editions Jacques Gabay 1988.

[Lehner]

J. Lehner: *Discontinous Groups and Automorphic Functions*, American Mathematical Society 1964.

[Löffel]

H. Löffel: *Blaise Pascal*, Birkhäuser 1987.

[Marsden–Tromba]

J. Marsden, A. Tromba: *Vektoranalysis*, Spektrum Akademischer Verlag 1995.

[Martin]

G. Martin: *The Foundations of Geometry and the Non-Euclidean Plane*, Springer 1975.

[Mathematische Modelle]

G. Fischer (Hrsg.): *Mathematische Modelle*, Vieweg 1986.

[McCleary]

J. McCleary: *Geometry from a Differentiable Viewpoint*, Cambridge University Press 1994.

[Meyberg–Vachenauer]

K. Meyberg, P. Vachenauer: *H¨ohere Mathematik I*, (2. Auflage) Springer 1993.

[Miller]

W. Miller: *Symmetry Groups and their Applications*, Academic Press 1972.

[Milnor]

J. Milnor: *Topology from the Differentiable Point of*

View, The University Press of Virginia 1965.

[Moise]

E. Moise: *Elementary Geometry from an Advanced*

Standpoint, Addison-Wesley 1990.

[Moran]

S. Moran: *The Mathematical Theory of Knots and Brai-*

ds: An Introduction, North Holland 1983.

[Mumford]

D. Mumford: *Algebraic Geometry I: Complex Algebraic*

Geometry, Springer 1976.

[Naber]

G. Naber: *The Geometry of Minkowski Spacetime*,

Springer 1992.

[Neugebauer]

O. Neugebauer: *Vorgriechische Mathematik*, Springer

1930.

[Neumann–Stoy–Thompson] P. Neumann, G. Stoy, E. Thompson: *Groups and Geo-*

metry, Oxford Science Publications 1994.

[Nikulin–Shafarevich]

V. Nikulin, I. Shafarevich: *Geometry and Groups*, Sprin-

ger 1987.

[Nöbeling]

G. Nöbeling: *Einf¨*

uhrung in die nichteuklidischen Geo-

metrien der Ebene, de Gruyter 1976.

[Ossa]

E. Ossa: *Topologie*, Vieweg 1992.

[Penrose]

R. Penrose: *The Geometry of the Universe*, in: Mathe-

matics Today (Ed. L. Stern), Springer 1978, pp. 83-126.

[Poincaré]

H. Poincaré: *Science et M´*

ethode, Flammarion, Paris

1912. Deutsche Übersetzung: *Wissenschaft und Metho-*

de, Teubner 1914.

[Pont]

J. Pont: *L'Aventure des Parall`*

eles, Verlag Peter Lang,

Bern/ Frankfurt/New York 1986.

[Pontrjagin]

L. Pontrjagin: *Learning Higher Mathematics, Part I: The Method of Coordinates*, Springer 1984.

[Quaisser]

E. Quaisser: *Diskrete Geometrie*, Spektrum Akademischer Verlag 1994.

[Quaisser–Sprengel]

E. Quaisser, Y.-H. Sprengel: *Geometrie in Ebene und Raum*, Verlag Harri Deutsch, Thun/Frankfurt am Main 1989.

[Reichardt]

H. Reichardt: *Gauß und die Anf¨ ange der nicht-euklidischen Geometrie*, Teubner, Leipzig 1985.

[Reid]

M. Reid: *Undergraduate Algebraic Geometry*, Cambridge University Press 1988.

[Remmert]

R. Remmert: *Funktionentheorie I*, Springer 1984.

[Roe]

J. Roe: *Elementary Geometry*, Oxford University Press 1993.

[Rose]

P. Rose: *Renaissance Italian methods of drawing the ellipse and related curves*, Physis 12, 371-404 (1970).

[Rosenfeld]

B. A. Rosenfeld: *A History of Non-Euclidean Geometry*, Springer 1988.

[Salmon–Fiedler]

G. Salmon, W. Fiedler: *Analytische Geometrie der Kegelschnitte*, 8. Auflage, 2 Bände, Teubner 1915.

[Scharlau–Opolka]

W. Scharlau, H. Opolka: *Von Fermat bis Minkowski*, Springer 1980.

[Scholz]

E. Scholz: *Symmetrie, Gruppe, Dualit¨at*, Birkhäuser 1989.

[Schubert]

H. Schubert: *Topologie*, Teubner 1964.

[Simmonds]

J. G. Simmonds: *A Brief on Tensor Analysis*, Springer

1982.

[Slodowy]

P. Slodowy: *Das Ikosaeder und die Gleichung f¨*

unften

Grades, In: *Mathematische Miniaturen 3*, Birkhäuser

1986 (pp. 71–114).

[Sommerfeld]

A. Sommerfeld: *Mechanik*, Reprint, Verlag Harry

Deutsch 1977.

[Stahl]

S. Stahl: *The Poincar´*

e Half-Plane, Jones and Bartlett

1993.

[Stillwell]

J. Stillwell: *Mathematics and its History*, Springer Un-

dergraduate Texts in Mathematics 1989.

[Tabachnikov]

S. Tabachnikov: *Billiards*, Panoramas et Synthèses 1,

Societé Mathématique de France 1995.

[Tóth, I.]

I. Tóth: *Das Parallelenproblem im Corpus Aristoteli-*

cum, Archive for History of exact Sciences 3, 249-422

(1967).

[Tóth, L.]

L.F. Tóth: *Regul¨*

are Figuren, Verlag der Ungarischen

Akademie der Wissenschaften 1965.

[Varadarajan]

V. S. Varadarajan: *Lie Groups, Lie Algebras and their*

Representations, Prentice Hall 1974.

[van der Waerden 1936]

B.L. van der Waerden: *Algebra I*, Springer 1936; Achte

Auflage: Heidelberger Taschenbücher 12, 1971

[van der Waerden 1956]

B. L. van der Waerden: *Erwachende Wissenschaft*,

Birkhäuser 1956.

[Weyl]

H. Weyl: *Symmetrie*, Birkhäuser 1955.

[Whittaker]

E. Whittaker: *Analytische Dynamik der Punkte und starren K¨orper*, Springer 1924.

[Yaglom]

I.M. Yaglom: *A Simple Non-Euclidean Geometry and its Physical Basis*, Springer 1979.

[Zeuthen]

H. Zeuthen: *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum*, Kopenhagen 1886.

Index

Äquivalenzrelation, 89, 120

D *n*, 44

Dandelin’sche Kugeln, 235

Abel, Niels Hendrik (1802-1829), 23

Dandelin, Germinal Pierre (1794-1847), 235

Abelsche Gruppe, 23

Dedekind’sches Axiom, 94, 103

Additionsgesetz auf elliptischen Kurven, 244

Descartes, René (1596-1650), 84

adjungierte Darstellung, 309

Determinante, 78, 105

affine Transformation, 242

Diedergruppe, 45

analytische Methode, 84, 97, 119

Diskriminante, 156, 172, 192

Anordnungsaxiome, 90

Divergenz, 79

Antinomie, 154

Divisionsalgebra, 348

Approximation irrationaler Zahlen, 164

Dodekaeder, 1, 46

Archimedisches Axiom, 94, 116

Doppelsechs, 296

assoziative Verknüpfung, 21

Doppelverhältnis, 120, 121, 125, 127

Asymptotenlinien einer Hyperbel, 170

Drehung, 2, 10, 77, 168, 256, 300

Axiom, 85, 87

Dreiteilung des Winkels, 97

Axiomatisierung, 151

duales Tetraeder, 25

Dualität, 219, 249

Bézout, Étienne (1730-1783), 244

Durchmesser, 178

Bézout, Satz von, 244

DV, 121

Bahn bei einer Gruppenoperation, 32

Basis eines Vektorraums, 128

Ebene, 271

Beltrami, Eugenio (1835-1900), 99, 148, 153

ebene Kurve, 243

Beltrami–Klein–Modell , 148

Eigenvektor, 255, 301

Bernoulli, Johann (1667-1748), 207

Eigenwert, 255, 301

Beschleunigung, 81

Eindeutigkeit eines Axiomensystems, 96

Bierseidel, 88

einfach zusammenhängend, 331

bijektiv, 16

Einsiedlerpunkt, 171, 260

Billiard, 188, 201, 236

Ea 1 ,*a* 2, 169

binäre Polyedergruppen, 349

Ea 1 ,*a* 2 ,*a* 3, 257

binäre quadratische Form, 154, 172

Elektrodynamik, 81

Bolyai, János (1802-1860), 152

Ellipse, 169

Brenngerade, 182, 189

Ellipsoid, 257

Brennpunkt, 179, 181–183, 201

elliptische Funktionen, 119

Brianchon, Charles-Julien (1783-1864), 219

elliptische Geometrie, 164

Brianchon, Satz von, 208, 219, 228, 249, 271

elliptische Koordinaten, 199

Brouwer, Luitzen Egbertus (1881-1966), 63

ergodisch, 239

Brouwerscher Fixpunktsatz, 63

Erzeugendensystem einer Gruppe, 127, 306,

Bruhat, Françoise, 127

314

Bruhat-Zerlegung, 127

Escher, Maurits Cornelis (1898-1971), 61,

Buckminster Fulleren, 61

146

Euklid (um 300 v.Chr), 84, 151

C *n*, 44

euklidische Ebene, 89

Cantor, Moritz (1829-1920), 154

Euler, Leonhard (1707-1783), 303

Cauchy - Schwarz’sche Ungleichung, 74

Eulersche Winkel, 303

Cayley-Oktaven, 348

Exzentrizität, 189

Cayley-Transformation, 143

charakteristisches Polynom, 301, 315

Fadenkonstruktion einer Ellipse, 179

Cohen, Paul Joseph, 154

Fermat’sche Vermutung, 243

Index

369

Fermat, Pierre (1601-1665), 243

Inversion am Kreis, 105, 130, 135

ϕA, 104

Inzidenzaxiome, 89, 165

Fixpunkt, 5, 31

Iso(*M*), 20

Fundamentalgruppe, 331

Isometrie, 2, 5, 94, 169, 257

Fundamentalsatz der Algebra, 353

Isotropiegruppe, 31

Fußpunktkonstruktion der Ellipse, 189

Jacobi, Carl Gustav (1804-1851), 309

γ(*A*), 281

Jacobi-Identität, 309

Gauß’scher Algorithmus, 126

Gauß, Carl Friedrich (1777-1855), 80, 126,

Kaustik für ein Billiard, 237

152

Kegel, 260

gebrochen lineare Transformation, 104, 125,

Kegelschnitt, 167

129, 139, 155

Kepler’sche Gesetze, 233

Gerade, 84, 88, 165, 167, 245, 263

Kepler, Johannes (1571-1630), 233

Gerling, Christian Ludwig (1788-1864), 152

Kervaire, Michel, 348

Geschwindigkeit, 81

Killing, Wilhelm (1847 - 1923), 323

Gitter, 154

Killingform, 323

GL(*n*, K), 28

Klein, Felix (1849-1925), 148, 153

Gradient, 79

Kleinschen Vierergruppe, 39

Graves, Charles (1812-1899), 207

Knotenlinie, 303

Gruppe, 20, 22, 104, 120

kommutative Gruppe, 23

Gruppenhomomorphismus, 28

Konfiguration, 296

Gruppenisomorphismus, 28

konfokale Kegelschnitte, 199

Gruppenoperation, 20, 30, 114, 120, 155

Kongruenz, 168

Gruppentafel, 25

Kongruenz von Dreiecken, 93

Kongruenz von Strecken, 89, 104, 149, 165

H, 99

Kongruenz von Winkeln, 89, 104, 165

Hamilton, William Rowan (1805-1865), 348

Kongruenzaxiome, 91, 116

Hauptachsen, 169

Konjugation, 309

Hauptachsentransformation, 251

Konjugation in einer Gruppe, 36

hexagonales Gitter, 163

konjugierte Durchmesser, 178

Hilbert, David (1862-1943), 88, 154

Kontinuumshypothese, 154

Hintereinanderschaltung von Abbildungen,

Koordinaten, cartesische, 65, 83

3

Kreisel, 345

Homotopie, 330

Kreuzprodukt von Vektoren, 68, 310

Homotopiegruppe, 344

kristallographische Gruppen, 62, 146

Hopf, Heinz (1894-1971), 340

kubische Fläche, 297

Hopfabbildung, 340

Ha 1 ,*a* 2, 170

L-R-Zerlegung, 127

H(*n*)

a

Länge eines Vektors, 70

1 ,*a* 2 ,*a* 3 , 258

Hyperbel, 170

Längenmessung, 120

hyperbolische Ebene, 98, 119, 120, 137, 294

Lambert, Johann Heinrich (1728-1777), 87,

hyperbolische Gerade, 99, 141, 149

Hyperboloid, 258, 263

Lazutkin, Vladimir, 238

Leibniz, Gottfried Wilhelm (1646-1716), 207

I, 46

Leitlinie, 189

Ikosaeder, 1, 46

lichtartige Vektoren, 289

Ikosaedergruppe, 46, 350

Lichtkegel, 289, 351

Imaginärteil einer komplexen Zahl, 99

Liealgebra, 307, 310, 321

infinitesimale Drehung, 81, 310

Lieklammer, 309

inverse Abbildung, 16

Liftung eines Weges, 337

Lobachevski, Nikolai (1793-1856), 152

Pauli, Wolfgang (1900-1958), 320

Logarithmus, 120, 122

Pauli-Matrizen, 320, 342

LORAN, 181

P1C, 125, 311

Lorentz, Hendrik Antoon (1853-1928), 278

Permutation, 26

Lorentz-Boosts, 281

π 1 (X,x 0), 331

Lorentz-Geometrie, 278, 292

Plato (um 400 v.Chr.), 151

Lorentz-Gruppe, 350

Platonischen Körper, 60

Lorentzkraft, 80

Poincaré, Henri (1854-1912), 98, 154

Polarisationsidentität, 70

Möbius-Transformation, 104

Polarkoordinaten, 230, 306

Magnetfeld, 80

Poncelet’scher Schlie¨

sungssatz, 241

Mather, John, 238

Poncelet, Victor (1788-1867), 241

Matrizenmultiplikation, 106

Postulat, 85, 87

Maxwell’sche Gleichungen, 81

Präzession eines Kreisels, 346

Mengenlehre, 154

projektive Ebene, 164, 244

Metrik, 123

projektive Transformation, 248

Michelson-Morley-Experiment, 286

Proklos Diodachos (410-485) , 152

Milnor, John, 348

Punkt, 84, 88

Minkowski, Hermann (1864-1909), 290

Punktspiegelung, 10

Minkowski-Geometrie, 290

Pythagoras, Satz von, 70, 83

Mittelsenkrechte, 198

quadratische Form, 154, 251

Newton’sche Gesetze, 80, 233

Quadrik, 250

Newton, Isaac (1642-1727), 80, 233, 243

Quaternionen, 347

nichtentartete Kegelschnitte, 171

Norm, 70

raumartige Vektoren, 289

Nutation eines Kreisels, 346

Realteil einer komplexen Zahl, 99

Rechte-Hand-Regel, 75

$O(n)$, 39

Reduktion binärer quadratischer Formen, 119,

O, 45

154

obere Halbebene, 99, 155

Relativitätstheorie, 278

Oktaeder, 20

Richtungsvektor einer Geraden, 168, 264

Oktaedergruppe, 46

Riemann’sche Zahlenkugel, 125, 311

Orbit bei einer Gruppenoperation, 32

Rotation, 79

Ordnung einer Gruppe, 23

Ordnung eines Gruppenelements, 47

Sn, 26

Orientierung, 26, 43, 300

Saccheri, Girolamo (1667-1733), 87, 152

Orthonormalbasis, 251

Satz über inverse Funktionen, 138

Scheibenmodell der hyperbolischen Ebene,

Pa, 170

141, 150

P (±)

a

Schiefkörper, 348

1 ,*a* 2 , 258, 259

Pappos von Alexandria , 214

schiefsymmetrische Matrix, 308

Pappos, Satz von, 214, 222, 229, 247

Schläfli, Ludwig (1814-1895), 298

Parabel, 170

Schumacher, Heinrich Christian (1780-1850),

Paraboloid, 259

152

parallele Geraden, 95, 264

$\sigma(M)$, 26

Parallelenaxiom, 83, 94, 99, 102, 115, 152

Sinai, Yakov, 239

Parallelepiped, 78

Skalarprodukt, 68, 70, 141

Parallelogramm, 74

$SL(n, \mathrm{K})$, 28

Pascal, Blaise (1623-1662), 210

$SL(2, \mathrm{C})$, 107

Pascal, Satz von, 208, 209, 228, 249

$SL(2, \mathrm{R})$, 107

$SO(3)$, 43, 300

verschlungene Kreise, 344

$sO(3)$, 307

$SO(2, 1)$, 278, 279

Würfel, 1, 17, 20, 24, 46, 48, 59

Spatprodukt, 78

wegzusammenhängend, 339

spezielle orthogonale Gruppe, 303

Weltlinie, 286

sphärische Geometrie, 166

Widerspruchsfreiheit eines Axiomensystems,

Spiegelung, 2

96, 119

Spinorenabbildung, 352

Wiles, Andrew, 243

Spur einer Matrix, 320

windschiefe Geraden, 264

$S(P,Q)$, 91

Winkel, 72, 84, 139

$StabG(m)$, 31

Winkelmessung, 137

Stabilisatoruntergruppe, 31, 107, 120

Winkelsumme, 141, 145

Standgruppe, 31

winkeltreu, 139, 140, 319

stereographische Projektion, 292, 311, 343,

352

Zeeman, Eric Christopher, 288

Stokes, George Gabriel (1819-1903), 80

zeitartige Vektoren, 289

Strahl, 91

Zeitdilatation, 289

$SU(2)$, 311

Zopfgruppe, 26, 353

$sU(2)$, 320

zusammenziehbarer Weg, 325

$SU(1\ ,\ 1)$, 142

Zwischenrelation, 88, 103, 166

Summe von Vektoren, 67

Zwischenwertsatz, 74, 77, 110

Symmetrie, 1, 19, 37, 146

zyklische Gruppe, 44

symmetrische Gruppe, 26, 36

Zylinder, 260

synthetische Methode, 84, 97, 119

T, 45

Tangentialebene, 269

Tangentialgerade, 186, 190

Tangentialraum, 186

Tangentialvektor, 137, 184

Taylor, Richard, 243

Tensor, 78

Tetraeder, 20, 24

Tetraedergruppe, 45

Thaleskreis, 135

Trägheitstensor, 291

transitive Gruppenoperation, 32

Translation, 2, 168

transponierte Matrix, 144, 278, 300

Unabhängigkeit eines Axiomensystems, 96,

154

unendlich ferne Gerade, 245

Uniformisierung Riemannscher Flächen, 119

Unmöglichkeitsbeweise, 97

Untergruppe, 24, 36

unverzweigte Überlagerung, 335

Vektor, 65, 106

Vektorprodukt, 68, 74, 310

Verknüpfung, 21